

## BÀI

## 01

## GIỚI HẠN CỦA DÃY SỐ

## A

## LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

## 1 Giới hạn của dãy số

**Định nghĩa 1:** Ta nói dãy số  $(u_n)$  có giới hạn là 0 khi  $n$  dần tới dương vô cực, nếu  $|u_n|$  có thể nhỏ hơn một số dương bé tùy ý kể từ một số hạng nào đó trở đi, kí hiệu  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$  hay  $u_n \rightarrow 0$  khi  $n \rightarrow +\infty$ .

**Chú ý:** Từ định nghĩa dãy số có giới hạn 0, ta có các kết quả sau:

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^k} = 0$  với  $k$  là một số nguyên dương
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$  nếu  $|q| < 1$
- Nếu  $|u_n| \leq v_n$  với mọi  $n \geq 1$  và  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$  thì  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ .

**Định nghĩa 2:** Ta nói dãy số  $(u_n)$  có giới hạn là số thực  $a$  khi  $n$  dần tới dương vô cực nếu  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - a) = 0$  và kí hiệu  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a$  hay  $u_n \rightarrow a$  khi  $n \rightarrow +\infty$ .

## 2 Định lý về giới hạn hữu hạn

a) Nếu  $\lim u_n = a$  và  $\lim v_n = b$  thì

- $\lim(u_n + v_n) = a + b$
- $\lim(u_n - v_n) = a - b$
- $\lim(u_n \cdot v_n) = a \cdot b$
- $\lim\left(\frac{u_n}{v_n}\right) = \frac{a}{b}$  (nếu  $b \neq 0$ ).

b) Nếu  $\begin{cases} \lim u_n = a \\ u_n \geq 0, \forall n \end{cases}$  thì  $\begin{cases} \lim \sqrt{u_n} = \sqrt{a} \\ a \geq 0 \end{cases}$ .

## 3 Tổng của cấp số nhân lùi vô hạn

Cấp số nhân vô hạn  $(u_n)$  có công bội  $q$ , với  $|q| < 1$  được gọi là cấp số nhân lùi vô hạn.

Tổng của cấp số nhân lùi vô hạn được tính bằng công thức sau đây:

$$S = u_1 + u_2 + u_3 + \frac{1}{4} + u_n + \frac{1}{4} = \frac{u_1}{1 - q} \quad (|q| < 1).$$

## 4 Giới hạn vô cực của dãy số

Ta nói dãy số  $(u_n)$  có giới hạn là  $+\infty$  khi  $n \rightarrow +\infty$ . Nếu  $u_n$  có thể lớn hơn một số dương bất kì, kể từ một số hạng nào đó trở đi.

Kí hiệu:  $\lim u_n = +\infty$  hay  $u_n \rightarrow +\infty$  khi  $n \rightarrow +\infty$ .

- Dãy số  $(u_n)$  có giới hạn là  $-\infty$  khi  $n \rightarrow +\infty$  nếu  $\lim(-u_n) = +\infty$ .

Kí hiệu:  $\lim u_n = -\infty$  hay  $u_n \rightarrow -\infty$  khi  $n \rightarrow +\infty$ .

**Nhận xét:**  $\lim u_n = +\infty \Leftrightarrow \lim(-u_n) = -\infty$ .

Ta thừa nhận các kết quả sau:

- $\lim n^k = +\infty$  với  $k$  nguyên dương
- $\lim q^n = +\infty$  nếu  $q > 1$ .

Liên quan đến giới hạn vô cực của dãy số, ta có một số quy tắc sau đây:

- Nếu  $\lim u_n = a$  và  $\lim v_n = \pm\infty$  thì  $\lim \frac{u_n}{v_n} = 0$ .
- Nếu  $\lim u_n = a > 0$ ,  $\lim v_n = 0$  và  $v_n > 0, \forall n > 0$  thì  $\lim \frac{u_n}{v_n} = +\infty$ .
- Nếu  $\lim u_n = +\infty$  và  $\lim v_n = a > 0$  thì  $\lim u_n \cdot v_n = +\infty$ .

**Phương pháp:**

- Để chứng minh  $\lim u_n = 0$  ta chứng minh

$$\forall a > 0 \text{ nhỏ tùy ý luôn tồn tại một số } n_a \text{ sao cho } |u_n| < a \quad \forall n > n_a$$

- Để chứng minh  $\lim u_n = L$  ta chứng minh  $\lim(u_n - L) = 0$

- Để chứng minh  $\lim u_n = +\infty$  ta chứng minh

$$\forall M > 0 \text{ lớn tùy ý luôn tồn tại một số } n_M \text{ sao cho } u_n > M \quad \forall n > n_M$$

- Để chứng minh  $\lim u_n = -\infty$  ta chứng minh  $\lim(-u_n) = +\infty$

- Một dãy số nếu có giới hạn thì giới hạn đó là duy nhất.

Nếu  $\lim u_n = a$  và  $\lim v_n = b$  thì:

$$\bullet \lim(u_n + v_n) = a + b$$

$$\bullet \lim(u_n - v_n) = a - b$$

$$\bullet \lim(u_n \cdot v_n) = a \cdot b$$

$$\bullet \lim\left(\frac{u_n}{v_n}\right) = \frac{a}{b} \quad (\text{nếu } b \neq 0).$$

$$\text{Nếu } \begin{cases} \lim u_n = a \\ u_n \geq 0, \forall n \end{cases} \text{ thì } \begin{cases} \lim \sqrt{u_n} = \sqrt{a} \\ a \geq 0 \end{cases}.$$

**BÀI TẬP TỰ LUẬN**

**Bài tập 1:** Tính các giới hạn sau đây:

a)  $\lim \frac{-2n+1}{n}$

b)  $\lim \frac{\sqrt{16n^2-2}}{n}$

c)  $\lim \frac{4}{2n+1}$

d)  $\lim \frac{n^2-2n+3}{2n^2}$

e)  $\lim \frac{1}{-3n+7}$

f)  $\lim \frac{2}{(n+1)(n-2)}$

g)  $\lim \frac{3}{2^n+1}$

h)  $\lim \frac{2^n}{5+7^n}$

i)  $\lim \frac{-3n^2+4n+1}{2n^3-3n+7}$

j)  $\lim \frac{(2n+1)(n-2)+n}{n^3+n}$

k)  $\lim \frac{4 \cdot 3^n + 5^n}{2 \cdot 5^n + 7^n}$

l)  $\lim \frac{4^n + 7^n}{(2^n+1)(5+7^n)}$

**Lời giải**

a)  $\lim \frac{-2n+1}{n} = \lim \left(-2 + \frac{1}{n}\right) = -2.$

b)  $\lim \frac{\sqrt{16n^2-2}}{n} = \lim \sqrt{\frac{16n^2-2}{n^2}} = \sqrt{\lim \left(16 - \frac{2}{n^2}\right)} = \sqrt{16} = 4.$

c)  $\lim \frac{4}{2n+1} = \lim \frac{\frac{4}{n}}{2+\frac{1}{n}} = \frac{0}{2+0} = 0.$

d)  $\lim \frac{n^2-2n+3}{2n^2} = \lim \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n} + \frac{3}{2n^2}\right) = \frac{1}{2}.$

$$\text{e) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{-3n+7} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{\left(-3+\frac{7}{n}\right)} = 0 \cdot \frac{1}{-3+0} = 0.$$

$$\text{f) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{(n+1)(n-2)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \cdot \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)} = 0 \cdot \frac{1}{(1+0)(1-0)} = 0.$$

$$\text{g) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{2^n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot \frac{3}{1+\left(\frac{1}{2}\right)^n} = 0 \cdot \frac{3}{1+0} = 0.$$

$$\text{h) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{5+7^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{7}\right)^n \cdot \frac{1}{5 \cdot \left(\frac{1}{7}\right)^n + 1} = 0 \cdot \frac{1}{5 \cdot 0 + 1} = 0.$$

$$\text{i) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-3n^2+4n+1}{2n^3-3n+7} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \frac{\left(-3+\frac{4}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}{2-\frac{3}{n^2}+\frac{7}{n^3}} = 0 \cdot \frac{-3+0+0}{2-0+0} = 0.$$

$$\text{j) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)(n-2)+n}{n^3+n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2-2n-2}{n^3+n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \frac{2-\frac{2}{n}-\frac{2}{n^2}}{1+\frac{1}{n^2}} = 0 \cdot \frac{2-0-0}{1+0} = 0.$$

$$\text{k) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 \cdot 3^n + 5^n}{2 \cdot 5^n + 7^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{5}{7}\right)^n \cdot \frac{4 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^n + 1}{2 \cdot \left(\frac{5}{7}\right)^n + 1} = 0 \cdot \frac{4 \cdot 0 + 1}{2 \cdot 0 + 1} = 0.$$

$$\text{l) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^n+7^n}{(2^n+1)(5+7^n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot \frac{\left(\frac{4}{7}\right)^n+1}{\left(1+\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)\left(5 \cdot \left(\frac{1}{7}\right)^n+1\right)} = 0.$$

**Bài tập 2:** Chứng minh các giới hạn sau đây:

$$\text{a) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2+n}{n^2+4} = 2$$

$$\text{b) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n+2}{n+5} = 6$$

$$\text{c) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7^n-2 \cdot 8^n}{8^n+3^n} = -2$$

$$\text{c) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \cdot 3^n+5^n}{5^n+3^n} = 1$$

$$\text{d) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3 \cdot 3^n - \sin 3n}{3^n}\right) = 3$$

$$\text{e) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{n^2+n} - n\right) = \frac{1}{2}$$

**Lời giải**

$$\text{a) Ta có } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n^2+n}{n^2+4} - 2\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-8}{n^2+4} \text{ vì } 0 \leq \left|\frac{n-8}{n^2+4}\right| \leq \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}.$$

Mà  $\lim \frac{1}{n} = 0$  nên suy ra  $\lim \left( \frac{2n^2 + n}{n^2 + 4} - 2 \right) = 0$  nên do đó  $\lim \frac{2n^2 + n}{n^2 + 4} = 2$

b) Ta có  $\lim \left( \frac{6n+2}{n+5} - 6 \right) = \lim \frac{-28}{n+5}$ . Vì  $\left| \frac{-28}{n+5} \right| < \frac{28}{n}$ .

Mà  $\lim \frac{28}{n} = 0$  nên  $\lim \left( \frac{6n+2}{n+5} - 6 \right) = 0$  nên do đó  $\lim \frac{6n+2}{n+5} = 6$ .

c) Ta có  $\lim \left( \frac{7^n - 2.8^n}{8^n + 3^n} + 2 \right) = \lim \frac{7^n + 2.3^n}{8^n + 3^n}$ . Vì  $0 < \left| \frac{7^n + 2.3^n}{8^n + 3^n} \right| < \frac{7^n + 2.3^n}{8^n + 3^n} < \frac{3.7^n}{8^n} = 3 \left( \frac{7}{8} \right)^n$ .

Mà nên  $\lim \left( \frac{7^n - 2.8^n}{8^n + 3^n} + 2 \right) = 0$  nên do đó  $\lim \frac{7^n - 2.8^n}{8^n + 3^n} = -2$ .

d) Ta có  $\lim \left( \frac{2.3^n + 5^n}{5^n + 3^n} - 1 \right) = \lim \frac{3^n}{5^n + 3^n}$ . Vì  $0 < \left| \frac{3^n}{5^n + 3^n} \right| < \frac{3^n}{5^n + 3^n} < \left( \frac{3}{5} \right)^n$ .

Mà  $\lim \left( \frac{3}{5} \right)^n = 0$  nên  $\lim \left( \frac{2.3^n + 5^n}{5^n + 3^n} - 1 \right) = 0$  nên do đó  $\lim \frac{2.3^n + 5^n}{5^n + 3^n} = 1$ .

e) Ta có  $\lim \left( \frac{3.3^n - \sin 3n}{3^n} - 3 \right) = \lim \left( \frac{-\sin 3n}{3^n} \right)$ . Vì  $0 \leq \left| \frac{-\sin 3n}{3^n} \right| = \frac{|\sin 3n|}{3^n} \leq \frac{1}{3^n} = \left( \frac{1}{3} \right)^n$ .

Mà  $\lim \left( \frac{1}{3} \right)^n = 0$  nên suy ra  $\lim \left( \frac{-\sin 3n}{3^n} \right) = 0$  nên do đó  $\lim \left( \frac{3.3^n - \sin 3n}{3^n} \right) = 3$ .

f) Ta có  $\lim \left( \sqrt{n^2 + n} - n - \frac{1}{2} \right) = \lim \frac{2\sqrt{n^2 + n} - (2n+1)}{2} = \lim \frac{-1}{2(2\sqrt{n^2 + n} + (2n+1))}$ .

Vì  $0 \leq \left| \frac{-1}{2(2\sqrt{n^2 + n} + (2n+1))} \right| \leq \frac{1}{2(2\sqrt{n^2 + n} + (2n+1))} \leq \frac{1}{2(2\sqrt{n^2} + 2n)} = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{n}, \forall n \in \mathbb{N}^*$ .

Mà  $\lim \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{8} \lim \frac{1}{n} = 0$  nên suy ra  $\lim \frac{-1}{2(2\sqrt{n^2 + n} + (2n+1))} = 0$ .

Do đó  $\lim \left( \sqrt{n^2 + n} - n \right) = \frac{1}{2}$ .

## Dạng 2: Giới hạn dạng phân thức

**Phương pháp:** Tính giới hạn  $\lim \frac{f(n)}{g(n)}$  trong đó  $f(n)$  và  $g(n)$  là các đa thức bậc  $n$ .

- **Bước 1:** Đặt  $n^k, n^i$  với  $k$  là số mũ cao nhất của đa thức  $f(n)$  và  $i$  là số mũ cao nhất của đa thức  $g(n)$  ra làm nhân tử chung.
- **Bước 2:** Áp dụng kết quả  $\lim \frac{1}{n^k} = 0$  suy ra  $\lim \frac{f(n)}{g(n)} = \dots$

### BÀI TẬP TỰ LUẬN

**Bài tập 1:** Tính các giới hạn sau đây:

a)  $\lim \frac{n^2 - 4n^3}{2n^3 + 5n - 2}$

b)  $\lim \frac{n^3 - 7n}{1 + 2n^2}$

c)  $\lim \frac{n + 2}{n^2 + n + 1}$

d)  $\lim \frac{n^4}{(n+1)(2+n)(n^2+1)}$

e)  $\lim \frac{-4n^2 + n + 2}{2n^2 + n + 1}$

f)  $\lim \frac{5n^2 + 3n - 7}{n^2}$

**Lời giải**

a) Ta có:  $\lim \frac{n^2 - 4n^3}{2n^3 + 5n - 2} = \lim \frac{n^3 \left( \frac{1}{n} - 4 \right)}{n^3 \left( 2 + \frac{5}{n^2} - \frac{2}{n^3} \right)} = \lim \frac{\frac{1}{n} - 4}{2 + \frac{5}{n^2} - \frac{2}{n^3}} = \frac{-4}{2} = -2.$

b) Ta có:  $\lim \frac{n^3 - 7n}{1 + 2n^2} = \lim \frac{n^3 \left( 1 - \frac{7}{n^2} \right)}{n^2 \left( \frac{1}{n^2} + 2 \right)} = \lim \left( n \cdot \frac{1 - \frac{7}{n^2}}{\frac{1}{n^2} + 2} \right) = +\infty.$

Vì  $\lim \left( \frac{1 - \frac{7}{n^2}}{\frac{1}{n^2} + 2} \right) = \frac{1}{2} > 0; \lim n = +\infty.$

c) Ta có:  $\lim \frac{n + 2}{n^2 + n + 1} = \lim \frac{n \left( 1 + \frac{2}{n} \right)}{n^2 \left( 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \right)} = \lim \frac{1}{n} \cdot \frac{1 + \frac{2}{n}}{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} = 0.$

d)

$\lim \frac{n^4}{(n+1)(2+n)(n^2+1)} = \lim \frac{n^4}{n \left( 1 + \frac{1}{n} \right) \cdot n \left( \frac{2}{n} + 1 \right) n^2 \left( 1 + \frac{1}{n^2} \right)} = \lim \frac{1}{\left( 1 + \frac{1}{n} \right) \left( \frac{2}{n} + 1 \right) \left( 1 + \frac{1}{n^2} \right)} = 1$

e)  $\lim \frac{-4n^2 + n + 2}{2n^2 + n + 1} = \lim \frac{-4 + \frac{1}{n} + \frac{2}{n^2}}{2 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} = \frac{-4}{2} = -2$

f)  $\lim \frac{5n^2 + 3n - 7}{n^2} = \lim \left( \frac{5n^2}{n^2} + \frac{3n}{n^2} - \frac{7}{n^2} \right) = \lim \left( 5 + \frac{3}{n} - \frac{7}{n^2} \right) = 5$

**Bài tập 2:** Tìm giới hạn của các dãy số sau:

a)  $u_n = \frac{-3n^3 + 2n^2 + 1}{2n^3 - n}$

b)  $u_n = \frac{2n + 1}{n^2 + n + 3}$

c)  $u_n = \frac{2025n + 2024}{n - 2023}$

**Lời giải**

$$\text{a) } \lim u_n = \lim \frac{-3n^3 + 2n^2 + 1}{2n^3 - n} = \lim \frac{n^3 \left( -3 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^3} \right)}{n^3 \left( 2 - \frac{1}{n^2} \right)} = \lim \frac{-3 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^3}}{2 - \frac{1}{n^2}} = -\frac{3}{2}$$

$$\text{b) } \lim u_n = \lim \frac{2n+1}{n^2+n+3} = \lim \frac{n \left( 2 + \frac{1}{n} \right)}{n^2 \left( 1 + \frac{1}{n} + \frac{3}{n^2} \right)} = \lim \frac{1}{n} \cdot \frac{2 + \frac{1}{n}}{1 + \frac{1}{n} + \frac{3}{n^2}} = 0$$

$$\text{c) } \lim u_n = \lim \frac{2025n + 2024}{n - 2023} = \lim \frac{n \left( 2025 + \frac{2024}{n} \right)}{n \left( 1 - \frac{2023}{n} \right)} = \lim \frac{2025 + \frac{2024}{n}}{1 - \frac{2023}{n}} = 2025.$$

**Bài tập 3:** Cho dãy số  $(u_n)$  với  $u_n = \frac{2n+b}{5n+3}$  trong đó  $b$  là tham số thực. Để dãy số  $(u_n)$  có giới hạn hữu hạn, giá trị của  $b$  bằng bao nhiêu ?

**Lời giải**

$$\text{Ta có: } \lim u_n = \lim \frac{2n+b}{5n+3} = \lim \frac{2 + \frac{b}{n}}{5 + \frac{3}{n}} = \frac{2}{5} \quad (\forall b \in \mathbb{R})$$

**Giải nhanh :**  $\frac{2n+b}{5n+3} \sim \frac{2n}{5n} = \frac{2}{5}$  với mọi  $b \in \mathbb{R}$ .

**Bài tập 4:** Cho dãy số  $(u_n)$  với  $u_n = \frac{4n^2+n+2}{an^2+5}$ . Để dãy số đã cho có giới hạn bằng 2, giá trị của  $a$  bằng bao nhiêu?

**Lời giải**

$$\text{Ta có: } 2 = \lim u_n = \lim \frac{4n^2+n+2}{an^2+5} = \lim \frac{4 + \frac{1}{n} + \frac{2}{n^2}}{a + \frac{5}{n^2}} = \frac{4}{a} \quad (a \neq 0) \Leftrightarrow a = 2.$$

**Giải nhanh :**  $2 \sim \frac{4n^2+n+2}{an^2+5} \sim \frac{4n^2}{an^2} = \frac{4}{a} \Leftrightarrow a = 2.$

### Dạng 3: Giới hạn dãy số dạng lũy thừa

**Phương pháp:** Tính giới hạn  $\lim \frac{f(n)}{g(n)}$  trong đó  $f(n)$  và  $g(n)$  là các lũy thừa dạng  $X^n$

- **Bước 1:** Đưa biểu thức về cùng số mũ  $n$ .
- **Bước 2:** Chia tử và mẫu số cho  $a^n$  trong đó  $a$  là số có trị tuyệt đối lớn nhất.
- **Bước 3:** Áp dụng kết quả “Nếu  $|q| < 1$  thì  $\lim q^n = 0$ ”.

### BÀI TẬP TỰ LUẬN

**Bài tập 1:** Tính các giới hạn sau đây:

a)  $\lim(2^n + 3^n)$

b)  $\lim[-4^n + (-2)^n]$

c)  $\lim\left(\frac{1+3^n}{3 \cdot 3^n + 2^n}\right)$

d)  $\lim\left(\frac{4 \cdot 3^n - 2^n}{2 \cdot 5^n + 4^n}\right)$

e)  $\lim\left(\frac{7^n + 1}{-2 \cdot 3^n - 3 \cdot 6^n}\right)$

f)  $\lim\left(\frac{5^{n+1} - 4^n + 1}{2 \cdot 5^n - 6^n}\right)$

g)  $\lim \frac{1+3+3^2+\dots+3^n}{2 \cdot 3^{n+1} + 2^n}$

h)  $\lim \frac{1+\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{3}\right)^2+\dots+\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1+\frac{2}{5}+\left(\frac{2}{5}\right)^2+\dots+\left(\frac{2}{5}\right)^n}$

i)  $\lim \frac{3^n - 2 \cdot 5^{n+1}}{2^{n+1} + 5^n}$

j)  $\lim \frac{3^n - 4 \cdot 2^{n+1} - 3}{3 \cdot 2^n + 4^n}$

k)  $\lim \frac{(-1)^n \cdot 2^{5n+1}}{3^{5n+2}}$

l)  $\lim \frac{3^n - 4 \cdot 2^{n+1} - 3}{3 \cdot 2^n + 4^n}$ .

### Lời giải

a)  $\lim(2^n + 3^n) = \lim 3^n \left[ \left(\frac{2}{3}\right)^n + 1 \right] = +\infty$ .

b)  $\lim[-4^n + (-2)^n] = \lim 4^n \left[ -1 + \left(-\frac{2}{4}\right)^n \right] = -\infty$ .

c)  $\lim\left(\frac{1+3^n}{3 \cdot 3^n + 2^n}\right) = \lim\left(\frac{\frac{1+3^n}{3^n}}{\frac{3 \cdot 3^n + 2^n}{3^n}}\right) = \lim\left(\frac{\frac{1}{3^n} + 1}{3 + \frac{2^n}{3^n}}\right) = \frac{1}{3}$

d)  $\lim\left(\frac{4 \cdot 3^n - 2^n}{3 \cdot 5^n + 4^n}\right) = \lim\left(\frac{\frac{4 \cdot 3^n - 2^n}{5^n}}{\frac{3 \cdot 5^n + 4^n}{5^n}}\right) = \lim\left(\frac{4 \cdot \frac{3^n}{5^n} - \frac{2^n}{5^n}}{2 + \frac{4^n}{5^n}}\right) = 0$

e)  $\lim\left(\frac{7^n + 1}{-2 \cdot 3^n - 3 \cdot 6^n}\right) = \lim\left(\frac{\frac{7^n + 1}{7^n}}{\frac{-2 \cdot 3^n - 3 \cdot 6^n}{7^n}}\right) = \lim\left(\frac{1 + \frac{1}{7^n}}{-2 \cdot \frac{3^n}{7^n} - 3 \cdot \frac{6^n}{7^n}}\right) = -\infty$

f)  $\lim\left(\frac{5^{n+1} - 4^n + 1}{2 \cdot 5^n - 6^n}\right) = \lim\left(\frac{\frac{5^{n+1} - 4^n + 1}{6^n}}{\frac{2 \cdot 5^n - 6^n}{6^n}}\right) = \lim \frac{5 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^n - \left(\frac{2}{3}\right)^n + \left(\frac{1}{6}\right)^n}{2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^n - 1} = 0$

$$g) \lim \frac{1+3+3^2+\dots+3^n}{2 \cdot 3^{n+1}+2^n} = \lim \frac{1-\frac{3}{2}(1-3^n)}{2 \cdot 3^{n+1}+2^n} = \frac{1}{4}$$

$$h) \text{Đặt: } u_n = 1 + \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{3}\right)^n; v_n = 1 + \frac{2}{5} + \left(\frac{2}{5}\right)^2 + \dots + \left(\frac{2}{5}\right)^n.$$

$$\text{Ta có: } u_n = 1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{3}} = 1 + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3^{n+1}}\right). \text{ tương tự } v_n = 1 + \frac{2}{3} \left(1 - \frac{2^n}{5^n}\right).$$

$$\text{Từ đó, } \lim u_n = \frac{3}{2}, \lim v_n = \frac{5}{3}. \text{ Vậy } \lim \frac{1 + \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{3}\right)^n}{1 + \frac{2}{5} + \left(\frac{2}{5}\right)^2 + \dots + \left(\frac{2}{5}\right)^n} = \frac{9}{10}.$$

$$i) \text{Giải nhanh: } \frac{3^n - 2 \cdot 5^{n+1}}{2^{n+1} + 5^n} \sim \frac{-2 \cdot 5^{n+1}}{5^n} = -10 \text{ hoặc cụ thể: } \lim \frac{3^n - 2 \cdot 5^{n+1}}{2^{n+1} + 5^n} = \lim \frac{\left(\frac{3}{5}\right)^n - 10}{2 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^n + 1} = -10.$$

$$j) \lim \frac{3^n - 4 \cdot 2^{n+1} - 3}{3 \cdot 2^n + 4^n} = \lim \frac{\left(\frac{3}{4}\right)^n - 8 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n - 3 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^n}{3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n + 1} = \frac{0}{1} = 0.$$

$$k) \lim \frac{(-1)^n 2^{5n+1}}{3^{5n+2}} = \lim (-1)^n \cdot \frac{2}{9} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0.$$

$$l) \text{Ta có: } \frac{3^n - 4 \cdot 2^{n+1} - 3}{3 \cdot 2^n + 4^n} = \frac{\left(\frac{3}{4}\right)^n - 4 \cdot 2 \left(\frac{2}{4}\right)^n - \frac{3}{n^4}}{3 \cdot \left(\frac{2}{4}\right)^n + 1} \text{ suy ra: } \lim \frac{3^n - 4 \cdot 2^{n+1} - 3}{3 \cdot 2^n + 4^n} = \frac{0}{1} = 0.$$

**Bài tập 2:** Cho dãy số  $(u_n)$ , xác định bởi:

$$a) u_1 = 1; u_{n+1} = \frac{u_n - 4}{u_n + 6}, \forall n \geq 1. \text{ Tính giới hạn } \lim \frac{u_n + 1}{u_n + 4}$$

$$b) u_1 = 3, u_{n+1} = \frac{u_n + 1}{2}, \forall n \geq 1. \text{ Tính giới hạn } \lim u_n$$

**Lời giải**

$$a) \text{Đặt } v_n = \frac{u_n + 1}{u_n + 4}. \text{ Ta có: } v_{n+1} = \frac{u_{n+1} + 1}{u_{n+1} + 4} = \frac{2(u_n + 1)}{5(u_n + 4)} = \frac{2}{5} v_n = \dots = \left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}.$$

$$\text{Vậy, ta có: } v_n = \left(\frac{2}{5}\right)^n \text{ do đó } \lim \frac{u_n + 1}{u_n + 4} = \lim v_n = 0.$$

$$b) \text{Ta có: } u_{n+1} - 1 = \frac{u_n - 1}{2} = \frac{1}{2^2} (u_{n-1} - 1) = \dots = \frac{1}{2^n} (u_1 - 1) = \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Do đó,  $u_n = \frac{1}{2^{n-2}} + 1$  nên  $\lim u_n = \lim \left( \frac{1}{2^{n-2}} + 1 \right) = 1$ .

**Bài tập 3:** Có bao nhiêu giá trị nguyên của  $a$  thuộc  $(0; 20)$  sao cho  $\lim \sqrt{3 + \frac{an^2 - 1}{3 + n^2} - \frac{1}{2^n}}$  là một số nguyên.

**Lời giải**

$$\text{Ta có } \begin{cases} \lim \frac{an^2 - 1}{3 + n^2} = \lim \frac{a - \frac{1}{n^2}}{\frac{3}{n^2} + 1} = a \\ \lim \frac{1}{2^n} = \lim \left( \frac{1}{2} \right)^n = 0 \end{cases} \Rightarrow \lim \sqrt{3 + \frac{an^2 - 1}{3 + n^2} - \frac{1}{2^n}} = \sqrt{3 + a}.$$

$$\text{Ta có } \begin{cases} a \in (0; 20), a \in \mathbb{Z} \\ \sqrt{a + 3} \in \mathbb{Z} \end{cases} \longrightarrow a \in \{1; 6; 13\}.$$

#### Dạng 4: Giới hạn dãy số dạng căn thức

**Phương pháp:** Ở dạng toán này ta thường gặp 2 trường hợp:

**Trường hợp 1:** Đơn giản thì ta chỉ rút nhân tử chung (như dạng 2)

**Lưu ý:**  $\sqrt[2a]{n^{2a}} = |n| = \begin{cases} n & \text{ khi } n \geq 0 \\ -n & \text{ khi } n < 0 \end{cases}$  ở đây ta chỉ có  $n \rightarrow +\infty$  nên  $\sqrt[2a]{n^{2a}} = n$

**Trường hợp 2:** Nhân lượng liên hợp, khi giới hạn ở dạng vô định:  $\frac{0}{0}; 0 \cdot \infty; \frac{\infty}{\infty}$

$$\oplus \quad \sqrt{A} - \sqrt{B} = \frac{A - B}{\sqrt{A} + \sqrt{B}}$$

$$\oplus \quad \sqrt{A} - B = \frac{A - B^2}{\sqrt{A} + B}$$

$$\oplus \quad \sqrt[3]{A} - \sqrt[3]{B} = \frac{A - B}{(\sqrt[3]{A})^2 + \sqrt[3]{A} \cdot \sqrt[3]{B} + (\sqrt[3]{B})^2}$$

$$\oplus \quad \sqrt[3]{A} - B = \frac{A - B^3}{(\sqrt[3]{A})^2 + \sqrt[3]{A} \cdot B + (B)^2}$$

Bên cạnh đó áp dụng các tính chất để tính được kết quả của giới hạn:

a)  $\lim \frac{1}{n} = 0; \lim \frac{1}{n^k} = 0$  ( với  $k$  là số nguyên dương).

b)  $\lim q^n = 0$  (nếu  $|q| < 1$ ).

c) Nếu  $u_n = c$  (với  $c$  là hằng số) thì  $\lim u_n = \lim c = c$ .

### BÀI TẬP TỰ LUẬN

**Bài tập 1:** Tính các giới hạn sau đây:

a)  $\lim (\sqrt{n^2 + 7} - \sqrt{n^2 + 5})$

b)  $\lim (\sqrt{n^2 - n + 1} - n)$

c)  $\lim (\sqrt[3]{n^2 - n^3} + n)$

d)  $\lim [\sqrt{n} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})]$

e)  $\lim \sqrt{\frac{8n+2}{2n-1}}$

f)  $\lim \sqrt{\frac{2n+9}{n+2}}$

g)  $\lim \frac{\sqrt{4n^2 + 1} + 2n - 1}{\sqrt{n^2 + 4n + 1} + n}$

h)  $\lim \frac{n^2 + \sqrt[3]{1 - n^6}}{\sqrt{n^4 + 1} + n^2}$

**Lời giải**

a)  $\lim (\sqrt{n^2 + 7} - \sqrt{n^2 + 5}) = \lim \frac{n^2 + 7 - n^2 - 5}{\sqrt{n^2 + 7} + \sqrt{n^2 + 5}} = \lim \frac{2}{\sqrt{n^2 + 7} + \sqrt{n^2 + 5}} = 0$

b) Ta có:  $\sqrt{n^2 - n + 1} - n \square \sqrt{n^2} - n = 0 \longrightarrow$  nhân lượng liên hợp :

$$\lim (\sqrt{n^2 - n + 1} - n) = \lim \frac{-n + 1}{\sqrt{n^2 - n + 1} + n} = \lim \frac{-1 + \frac{1}{n}}{\sqrt{1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} + 1} = -\frac{1}{2}$$

c)  $\sqrt[3]{n^2 - n^3} + n \square \sqrt[3]{-n^3} + n = 0 \longrightarrow$  nhân lượng liên hợp :

$$\lim (\sqrt[3]{n^2 - n^3} + n) = \lim \frac{n^2}{\sqrt[3]{(n^2 - n^3)^2} - n\sqrt[3]{n^2 - n^3} + n^2} = \lim \frac{1}{\sqrt[3]{\left(\frac{1}{n} - 1\right)^2} - \sqrt[3]{\frac{1}{n} - 1} + 1} = \frac{1}{3}.$$

d)  $\sqrt{n} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \square \sqrt{n} (\sqrt{n} - \sqrt{n}) = 0 \longrightarrow$  nhân lượng liên hợp :

$$\lim \sqrt{n} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \lim \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \lim \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1} = \frac{1}{2}$$

$$\text{e) } \lim \sqrt{\frac{8n+2}{2n-1}} = \lim \sqrt{\frac{n\left(8+\frac{2}{n}\right)}{n\left(2-\frac{1}{n}\right)}} = \lim \sqrt{\frac{8+\frac{2}{n}}{2-\frac{1}{n}}} = \sqrt{\frac{8+0}{2-0}} = 2$$

$$\text{f) } \lim \sqrt{\frac{2n+9}{n+2}} = \lim \sqrt{\frac{n\left(2+\frac{9}{n}\right)}{n\left(1+\frac{2}{n}\right)}} = \lim \sqrt{\frac{2+\frac{9}{n}}{1+\frac{2}{n}}} = \sqrt{\frac{2}{1}} = \sqrt{2}$$

$$\begin{aligned} \text{g) } \lim \frac{\sqrt{4n^2+1}+2n-1}{\sqrt{n^2+4n+1}+n} &= \lim \frac{n\sqrt{4+\frac{1}{n^2}}+n\left(2-\frac{1}{n}\right)}{n\sqrt{1+\frac{4}{n}+\frac{1}{n^2}}+n} \\ &= \lim \frac{\sqrt{n^2\left(4+\frac{1}{n^2}\right)}+n\left(2-\frac{1}{n}\right)}{\sqrt{n^2\left(1+\frac{4}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}+n} = \lim \frac{\sqrt{4+\frac{1}{n^2}}+2-\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{4}{n}+\frac{1}{n^2}}+1} = \frac{\sqrt{4}+2}{1+1} = 2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{h) } \lim \frac{n^2+\sqrt[3]{1-n^6}}{\sqrt{n^4+1}+n^2} &= \lim \frac{n^2-\sqrt[3]{n^6\left(\frac{1}{n^6}-1\right)}}{\sqrt{n^4\left(1+\frac{1}{n^4}\right)}+n^2} \\ &= \lim \frac{n^2-n^2\sqrt[3]{\frac{1}{n^6}-1}}{n^2\left(\sqrt{1+\frac{1}{n^4}}+1\right)} = \lim \frac{1-\sqrt[3]{\frac{1}{n^6}-1}}{\sqrt{1+\frac{1}{n^4}}+1} = \frac{1+\sqrt[3]{-1}}{1+1} = 0. \end{aligned}$$

**Bài tập 2:** Tính các giới hạn sau đây:

$$\text{a) } A = \lim \frac{\sqrt{4n^2+3}-2n+1}{\sqrt{n^2+2n+3n}}$$

$$\text{b) } B = \lim \frac{2n+1-\sqrt{n^2+2n-4}}{3n+\sqrt{n^2+7}}$$

$$\text{c) } C = \lim \frac{\sqrt{3n^2+1}-\sqrt{n^2-1}}{n}$$

$$\text{d) } D = \lim \frac{\sqrt[3]{n^6+n+1}-4\sqrt{n^4+2n-1}}{(2n+3)^2}$$

$$\text{e) } E = \lim \frac{\sqrt{4n^2-1}+\sqrt[3]{8n^3+2n^2-3}}{\sqrt{16n^2+4n}-\sqrt[4]{n^4+1}}$$

$$\text{f) } F = \lim \frac{n^2+\sqrt[3]{1-n^6}}{\sqrt{n^4+1}-n^2}$$

**Lời giải**

$$\text{a) } A = \lim \frac{\sqrt{4n^2+3}-2n+1}{\sqrt{n^2+2n+3n}} = \lim \frac{n\sqrt{4+\frac{3}{n^2}}-2n+1}{n\sqrt{1+\frac{2}{n}}+3n} = \lim \frac{n\left(\sqrt{4+\frac{3}{n^2}}-2+\frac{1}{n}\right)}{n\left(\sqrt{1+\frac{2}{n}}+3\right)}$$

$$= \lim \frac{\sqrt{4 + \frac{3}{n^2}} - 2 + \frac{1}{n}}{\sqrt{1 + \frac{2}{n}} + 3} = 0.$$

$$\text{b) } B = \lim \frac{2n+1-\sqrt{n^2+2n-4}}{3n+\sqrt{n^2+7}} = \lim \frac{2n+1-n\sqrt{1+\frac{2}{n}-\frac{4}{n^2}}}{3n+n\sqrt{1+\frac{7}{n^2}}} = \lim \frac{2+\frac{1}{n}-\sqrt{1+\frac{2}{n}-\frac{4}{n^2}}}{3+\sqrt{1+\frac{7}{n}}} = \frac{1}{4}.$$

$$\begin{aligned} \text{c) } C &= \lim \frac{\sqrt{3n^2+1}-\sqrt{n^2-1}}{n} = \lim \frac{n\sqrt{3+\frac{1}{n^2}}-n\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}}{n} = \lim \frac{n\left(\sqrt{3+\frac{1}{n^2}}-\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}\right)}{n} \\ &= \lim \left(\sqrt{3+\frac{1}{n^2}}-\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}\right) = \sqrt{3}-1. \end{aligned}$$

$$\text{d) } D = \lim \frac{\sqrt[3]{n^6+n+1}-4\sqrt{n^4+2n-1}}{(2n+3)^2} = \lim \frac{\sqrt[3]{1+\frac{1}{n^5}+\frac{1}{n^6}}-4\sqrt{1+\frac{2}{n^3}-\frac{1}{n^4}}}{\left(2+\frac{3}{n}\right)^2} = \frac{1-4}{4} = -\frac{3}{4}.$$

$$\text{e) } E = \lim \frac{\sqrt{4n^2-1}+\sqrt[3]{8n^3+2n^2-3}}{\sqrt{16n^2+4n}-\sqrt[4]{n^4+1}} = \lim \frac{\sqrt{4-\frac{1}{n^2}}+\sqrt[3]{8+\frac{2}{n}-\frac{3}{n^3}}}{\sqrt{16+\frac{4}{n}}-\sqrt[4]{1+\frac{1}{n^4}}} = \frac{2+2}{4-1} = \frac{4}{3}.$$

$$\begin{aligned} \text{f) } F &= \lim \frac{n^2+\sqrt[3]{1-n^6}}{\sqrt{n^4+1}-n^2} = \lim \frac{(n^6+1-n^6)(\sqrt{n^4+1}+n^2)}{(n^4+1-n^4)\left[n^4-n^2\cdot\sqrt[3]{1-n^6}+(\sqrt[3]{1-n^6})^2\right]} \\ &= \lim \frac{\sqrt{n^4+1}+n^2}{n^4-n^2\cdot\sqrt[3]{1-n^6}+(\sqrt[3]{1-n^6})^2} = \lim \frac{n^4\left(\sqrt{\frac{1}{n^4}+\frac{1}{n^8}}+\frac{1}{n^2}\right)}{n^4\cdot\left[1-\sqrt[3]{\frac{1}{n^6}}-1+\left(\sqrt[3]{\frac{1}{n^6}}-1\right)^2\right]} \\ &= \lim \frac{\sqrt{\frac{1}{n^4}+\frac{1}{n^8}}+\frac{1}{n^2}}{1-\sqrt[3]{\frac{1}{n^6}}-1+\left(\sqrt[3]{\frac{1}{n^6}}-1\right)^2} = \lim \frac{\sqrt{0+0}+0}{1-\sqrt[3]{0+1}+(\sqrt[3]{0-1})^2} = \frac{0}{1+1+1} = 0. \end{aligned}$$

### Dạng 5: Tổng của cấp số nhân lùi vô hạn

**Phương pháp:** Cấp số nhân lùi vô hạn là cấp số nhân vô hạn và có công bội là  $|q| < 1$ .

- Tổng các số hạng của một cấp số nhân lùi vô hạn  $(u_n)$ :

$$S = u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots = \frac{u_1}{1-q}$$

- Mọi số thập phân đều được biểu diễn dưới dạng lũy thừa của 10:

$$X = N, a_1 a_2 a_3 \dots a_n \dots = N + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \frac{a_3}{10^3} + \dots + \frac{a^n}{10^n} + \dots$$

### BÀI TẬP TỰ LUẬN

**Bài tập 1:** Tính tổng của cấp số nhân lùi vô hạn  $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \dots, \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}, \dots$

#### Lời giải

Theo đề cho ta có:  $u_1 = 1, q = -\frac{1}{2}$  nên suy ra  $S = \frac{u_1}{1-q} = \frac{1}{1+\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$ .

**Bài tập 2:** Cho số thập phân vô hạn tuần hoàn  $a = 0,212121\dots$  (chu kỳ là 21). Tìm  $a$  dưới dạng phân số.

#### Lời giải

**Cách 1:** Giải bằng tự luận

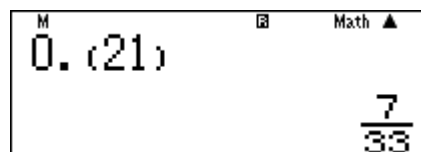
Ta có:  $a = 0,212121\dots = 0,21 + 0,0021 + 0,000021 + \dots = 21 \left( \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^4} + \frac{1}{10^6} + \dots \right)$

Tổng  $S = \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^4} + \frac{1}{10^6} + \dots$  là tổng cấp số nhân lùi vô hạn có  $u_1 = \frac{1}{10^2}, q = \frac{1}{10^2}$ .

Khi đó:  $S = \frac{u_1}{1-q} = \frac{\frac{1}{10^2}}{1-\frac{1}{10^2}} = \frac{1}{99}$ . Do đó  $A = 21 \cdot \frac{1}{99} = \frac{7}{33}$ .

**Cách 3:** Giải nhanh bằng máy tính

Nhập vào màn hình  $0,(21)$  và ấn phím  $\boxed{=}$  ta được kết quả  $\frac{7}{33}$ .



**Bài tập 3:** Tổng  $S_n = 1 + 0,9 + (0,9)^2 + (0,9)^3 + \dots + (0,9)^{n-1} + \dots$  có kết quả bằng bao nhiêu?

#### Lời giải

Ta có:  $S = 1 + 0,9 + (0,9)^2 + (0,9)^3 + \dots + (0,9)^{n-1} + \dots$

Đây là tổng của cấp số nhân lùi vô hạn có  $u_1 = 1, q = 0,9$  nên  $S = \frac{u_1}{1-q} = \frac{1}{1-0,9} = 10$ .

**Bài tập 4:** Cho  $S = 1 + q + q^2 + q^3 + \dots, |q| < 1$

$T = 1 + Q + Q^2 + Q^3 + \dots, |Q| < 1; E = 1 + qQ + q^2Q^2 + q^3Q^3 + \dots$ . Biểu thị biểu thức  $E$  theo  $S, T$

**Lời giải**

$S = 1 + q + q^2 + q^3 + \dots, |q| < 1$  là tổng của cấp số nhân lùi vô hạn, có  $u_1 = 1, q = q$ .

$$\text{Khi đó: } S = \frac{u_1}{1-q} = \frac{1}{1-q} \Rightarrow q = \frac{S-1}{S} \quad (1)$$

$$\text{Tương tự: } T = \frac{1}{1-Q} \Rightarrow Q = \frac{T-1}{T}. \quad (2)$$

$E = 1 + q.Q + q^2.Q^2 + q^3.Q^3 + \dots$  là tổng của cấp số nhân lùi vô hạn công bội  $qQ$  (vì  $|qQ| < 1$ , và  $u_1 = 1$ ).

$$E = \frac{u_1}{1-qQ} \quad (3)$$

$$\text{Thay (1), (2) vào (3): } E = \frac{u_1}{1 - \frac{T-1}{T} \cdot \frac{S-1}{S}} \Rightarrow E = \frac{ST}{S+T-1}.$$

**Bài tập 5:** Tìm số hạng  $U_1$  của cấp số nhân lùi vô hạn, biết  $S = 4; q = \frac{1}{2}$ .

**Lời giải**

$$\text{Ta có: } S = \frac{u_1}{1-q} \left( |q| < 1 \right) \Rightarrow 4 - \frac{u_1}{1 - \frac{1}{2}} \Rightarrow u_1 = 2.$$

**BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM**

**PHẦN I.** Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

**Câu 1:** Tính  $\lim \frac{3}{2n+3}$  được kết quả bằng

**A.**  $\frac{3}{2}$ .

**B.** 0.

**C.** 1.

**D.**  $+\infty$ .

**Lời giải**

$$\text{Ta có: } \lim \frac{3}{2n+3} = \lim \frac{\frac{3}{n}}{2+\frac{3}{n}} = \frac{0}{2+0} = 0.$$

**Câu 2:** Tính  $\lim \frac{-3n+4}{3+n}$  được kết quả bằng

**A.** -1.

**B.**  $-\infty$ .

**C.** -3.

**D.** 4.

**Lời giải**

$$\text{Ta có: } \lim \frac{-3n+4}{3+n} = \lim \frac{-3+\frac{4}{n}}{\frac{3}{n}+1} = \frac{-3+0}{0+1} = -3.$$

**Câu 3:** Giới hạn của dãy số  $(u_n)$  với  $u_n = \frac{n(n+1)}{2n^2+n+3}$  bằng

**A.**  $\frac{1}{2}$ .

**B.** 1.

**C.** 3.

**D.**  $+\infty$ .

**Lời giải**

$$\text{Ta có } \lim u_n = \lim \frac{n(n+1)}{2n^2+n+3} = \lim \frac{n^2 \left(1+\frac{1}{n}\right)}{n^2 \left(2+\frac{1}{n}+\frac{3}{n^2}\right)} = \lim \frac{1+\frac{1}{n}}{2+\frac{1}{n}+\frac{3}{n^2}} = \frac{1+0}{2+0+0} = \frac{1}{2}.$$

**Câu 4:** Giới hạn  $\lim \frac{2n+1}{n^2+3n+2}$  bằng

**A.** 2.

**B.**  $+\infty$ .

**C.** 0.

**D.**  $-\infty$ .

**Lời giải**

$$\text{Ta có } \lim \frac{2n+1}{n^2+3n+2} = \lim \frac{\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}} = \frac{0+0}{1+0+0} = 0.$$

**Câu 5:** Giới hạn  $\lim \frac{n-n^3}{n^2+n+1}$  bằng

**A.** 1.

**B.**  $-\infty$ .

**C.** -1.

**D.**  $+\infty$ .

**Lời giải**

$$\text{Ta có: } \lim \frac{n-n^3}{n^2+n+1} = \lim \left( n \cdot \frac{\frac{1}{n^2}-1}{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}} \right) = -\infty$$

$$\text{Vì } \lim n = +\infty \text{ và } \lim \frac{\frac{1}{n^2}-1}{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}} = \frac{0-1}{1+0+0} = -1 < 0.$$

**Câu 6:** Giới hạn  $\lim \frac{2n^2 + n + 5}{2n + 1}$  bằng

**A.** 1.

**B.** 0.

**C.**  $-\infty$ .

**D.**  $+\infty$ .

**Lời giải**

$$\text{Ta có } \lim \frac{2n^2 + n + 5}{2n + 1} = \lim \left( n \cdot \frac{2 + \frac{1}{n} + \frac{5}{n^2}}{2 + \frac{1}{n}} \right) = +\infty$$

$$\text{Vì } \lim n = +\infty \text{ và } \lim \frac{2 + \frac{1}{n} + \frac{5}{n^2}}{2 + \frac{1}{n}} = \frac{2 + 0 + 0}{2 + 0} = 1 > 0.$$

**Câu 7:** Giới hạn  $L = \lim \frac{(2n-3)(3n+1)}{6n^2 + n + 1}$  bằng:

**A.** 1.

**B.** 0.

**C.**  $-\infty$ .

**D.**  $+\infty$ .

**Lời giải**

$$\text{Ta có: } L = \lim \frac{(2n-3)(3n+1)}{6n^2 + n + 1} = \lim \frac{n \left( 2 - \frac{3}{n} \right) \cdot n \left( 3 + \frac{1}{n} \right)}{n^2 \left( 6 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \right)} = \lim \frac{\left( 2 - \frac{3}{n} \right) \cdot \left( 3 + \frac{1}{n} \right)}{6 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} = \frac{2 \cdot 3}{6} = 1.$$

**Câu 8:** Cho  $L = \lim \frac{(an+1)^3 (n^2 + 3n + 5)}{(2n-1)^2 (n^2 + 3)^2}$ . Tìm tất cả các giá trị của  $a$  để  $L = \frac{1}{2}$ .

**A.**  $a = 0$ .

**B.**  $a = 1$ .

**C.**  $a \in \mathbb{Q}$ .

**D.**  $a \in \emptyset$ .

**Lời giải**

$$\text{Ta có: } L = \lim \frac{(an+1)^3 (n^2 + 3n + 5)}{(2n-1)^2 (n^2 + 3)^2} = \lim \frac{n^3 \left( a + \frac{1}{n} \right)^3 \cdot n^2 \left( 1 + \frac{3}{n} + \frac{5}{n^2} \right)}{n \left( 2 - \frac{1}{n} \right) \cdot n^4 \left( 1 + \frac{3}{n^2} \right)^2}$$

$$= \lim \frac{\left( a + \frac{1}{n} \right)^3 \cdot \left( 1 + \frac{3}{n} + \frac{5}{n^2} \right)}{\left( 2 - \frac{1}{n} \right) \cdot \left( 1 + \frac{3}{n^2} \right)^2} = \frac{a^3}{2}.$$

Từ đề bài suy ra  $\frac{a^3}{2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow a = 1$ . Vậy  $a = 1$  là giá trị cần tìm.

**Câu 9:** Giới hạn  $L = \lim \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2}{n^3}$  bằng

**A.**  $\frac{1}{3}$ .

**B.** 0.

**C.**  $+\infty$ .

**D.**  $\frac{1}{6}$ .

**Lời giải**

Ta có  $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$  (\*), thật vậy với (\*) đúng với  $n = 1$ .

Giả sử (\*) đúng với  $n = k$ , ta có:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + k^2 + (k+1)^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 = \frac{(k+1)(k+2)[2(k+1)+1]}{6}$$

Vậy (\*) đúng với  $n \in \mathbb{N}^*$ . Do đó:

$$\begin{aligned} L &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2}{n^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}{n^3} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(2 + \frac{1}{n}\right)}{6n^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(2 + \frac{1}{n}\right)}{6} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

**Câu 10:** Cho dãy số  $(u_n): u_n = \frac{1}{n^2 + n}$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$  và  $(v_n): v_n = \sum_{k=1}^n u_k$ . Tính  $\lim v_n$

- A. 0.                      **B. 1.**                      C.  $+\infty$ .                      D.  $-\infty$ .

**Lời giải**

$$\text{Ta có: } u_n = \frac{1}{n^2 + n} = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

$$\text{Suy ra: } v_n = \sum_{k=1}^n u_k = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}.$$

$$\text{Vậy } \lim v_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} = 1.$$

**Câu 11:** Tính  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4n^2 + 2} + n}{n-1}$ .

- A. 2.                      **B. 3.**                      C.  $+\infty$ .                      D. 5.

**Lời giải**

$$\text{Ta có } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4n^2 + 2} + n}{n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4 + \frac{2}{n^2}} + 1}{1 - \frac{1}{n}} = 3.$$

**Câu 12:** Tính  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^3 + 2023}}{2n + 2024}$ .

- A.  $\frac{\sqrt[3]{2023}}{2024}$ .                      **B.  $\frac{1}{2}$ .**                      C.  $+\infty$ .                      D. 0.

**Lời giải**

$$\text{Ta có } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^3 + 2023}}{2n + 2024} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{1 + \frac{2023}{n^3}}}{2 + \frac{2024}{n}} = \frac{1}{2}.$$

**Câu 13:** Tính  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+5} - 2n}{n-1}$ .

- A. 0.                      B. -1.                      C.  $-\infty$ .                      **D. -2.**

**Lời giải**

Ta có  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+5} - 2n}{n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{5}{n^2}} - 2}{1 - \frac{1}{n}} = -2.$

**Câu 14:** Tính  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3\sqrt{n+5} - 2\sqrt{n}}{n^2 + 5}.$

A. 0.

B.  $+\infty.$

C.  $-\infty.$

D. 1.

**Lời giải**

Ta có  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3\sqrt{n+5} - 2\sqrt{n}}{n^2 + 5} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3\sqrt{\frac{1}{n^3} + \frac{5}{n^4}} - 2\sqrt{\frac{1}{n^3}}}{1 + \frac{5}{n^2}} = 0.$

**Câu 15:** Tính  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{8n^3 + n^2 - 1} + 4n + 3}{3n - 7}.$

A. 2.

B.  $\frac{2}{3}.$

C.  $\frac{4}{3}.$

D. 4.

**Lời giải**

Ta có  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{8n^3 + n^2 - 1} + 4n + 3}{3n - 7} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{8 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n^3}} + 4 + \frac{3}{n}}{3 - \frac{7}{n}} = 2.$

**Câu 16:** Tính  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^6 + 4} - \sqrt[3]{27n^6 - 3n^2 + 1}}{n^2 - 2024}.$

A. 0.

B.  $+\infty.$

C. -3.

D. -2.

**Lời giải**

Ta có  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^6 + 4} - \sqrt[3]{27n^6 - 3n^2 + 1}}{n^2 - 2024} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{1 + \frac{4}{n^6}} - \sqrt[3]{27 - \frac{3}{n^4} + \frac{1}{n^6}}}{1 - \frac{2024}{n^2}} = -2.$

**Câu 17:** Tính  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2 - 4} - \sqrt[3]{8n^3 + n^2}}{n}.$

A. 0.

B. -2.

C.  $-\infty.$

D. -1.

**Lời giải**

Ta có  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2 - 4} - \sqrt[3]{8n^3 + n^2}}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1 - \frac{4}{n^2}} - \sqrt[3]{8 + \frac{1}{n}}}{1} = -1.$

**Câu 18:** Giả sử  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{9n^2 - 4} - \sqrt[3]{n^3 + n^2}}{5n + 11} = \frac{a}{b}$  với  $a, b \in \mathbb{Q}$  và  $\frac{a}{b}$  tối giản. Giá trị của  $T = 2a - 3b$  bằng

A. -9.

B. -1.

C. 21.

D. -11.

**Lời giải**

Ta có  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{9n^2 - 4} - \sqrt[3]{n^3 + n^2}}{5n + 11} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{9 - \frac{4}{n^2}} - \sqrt[3]{1 + \frac{1}{n}}}{5 + \frac{11}{n}} = \frac{2}{5}.$

Suy ra  $a = 2, b = 5$ . Do đó  $T = 2(2) - 3(5) = -11$ .

**Câu 19:** Biết  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{16n^4 - 4} - \sqrt[3]{n^6 + \pi}}{an^2 + \pi} = -12$  với  $a \neq 0$ . Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A.**  $a \in (-12; -2)$ .      **B.**  $a \in (-2; 2)$ .      **C.**  $a \in (2; 6)$ .      **D.**  $a \in (6; 12)$ .

**Lời giải**

$$\text{Ta có } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{16n^4 - 4} - \sqrt[3]{n^6 + \pi}}{an^2 + \pi} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{16 - \frac{4}{n^4}} - \sqrt[3]{1 + \frac{\pi}{n^6}}}{a + \frac{\pi}{n^2}} = \frac{3}{a}.$$

$$\text{Suy ra } \frac{3}{a} = -12 \Rightarrow a = -\frac{1}{4} \in (-2; 2).$$

**Câu 20:** Biết  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^4 - 4} - \sqrt[3]{27n^6 + 5} + 9n + 1}{an^2 + n + 1} = -1$  với  $a \neq 0$ . Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A.**  $a \in (-7; -1)$ .      **B.**  $a \in (-1; 1)$ .      **C.**  $a \in (1; 7)$ .      **D.**  $a \in (7; 12)$ .

**Lời giải**

$$\text{Ta có } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^4 - 4} - \sqrt[3]{27n^6 + 5} + 9n + 1}{an^2 + n + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1 - \frac{4}{n^4}} - \sqrt[3]{27 + \frac{5}{n^6}} + \frac{9}{n} + \frac{1}{n^2}}{a + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} = \frac{-2}{a}.$$

$$\text{Suy ra } \frac{-2}{a} = -1 \Rightarrow a = 2 \in (1; 7).$$

**Câu 21:** Giá trị của giới hạn  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{3n+5} - \sqrt{3n+1})$  bằng:

- A.** 0.      **B.** 1.      **C.** 3.      **D.** 5.

**Lời giải**

Ta có:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{3n+5} - \sqrt{3n+1}) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{3n+5} - \sqrt{3n+1})(\sqrt{3n+5} + \sqrt{3n+1})}{\sqrt{3n+5} + \sqrt{3n+1}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4}{\sqrt{3n+5} + \sqrt{3n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{4}{\sqrt{n}}}{\sqrt{3 + \frac{5}{n}} + \sqrt{3 + \frac{1}{n}}} = 0 \end{aligned}$$

**Câu 22:** Tính  $\lim_{n \rightarrow \infty} (n - \sqrt{n^2 - 4n + 1})$ .

- A.**  $-\infty$ .      **B.**  $-2$ .      **C.**  $+\infty$ .      **D.** 2.

**Lời giải**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (n - \sqrt{n^2 - 4n + 1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n - 1}{n + \sqrt{n^2 - 4n + 1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 - \frac{1}{n}}{1 + \sqrt{1 - \frac{4}{n} + \frac{1}{n^2}}} = \frac{4 - 0}{1 + \sqrt{1 - 0 + 0}} = 2.$$

**Câu 23:** Kết quả của  $\lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt{n+5} - \sqrt{n})$  bằng

- A.**  $+\infty$ .      **B.**  $-\infty$ .      **C.** 2.      **D.** 0.

**Lời giải**

$$\lim n(\sqrt{n+5} - \sqrt{n}) = \lim \frac{5n}{\sqrt{n+5} + \sqrt{n}} = \lim \frac{5}{\sqrt{\frac{1}{n^2} + \frac{5}{n}} + \sqrt{\frac{1}{n}}}.$$

Ta có:  $\begin{cases} \lim 5 = 5 > 0 \\ \lim \left( \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{5}{n^2}} + \sqrt{\frac{1}{n}} \right) = 0; \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{5}{n^2}} + \sqrt{\frac{1}{n}} > 0 \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases} \Rightarrow \lim (\sqrt{n+5} - \sqrt{n})n = +\infty.$

**Câu 24:** Giá trị đúng của  $\lim \left[ \sqrt{n}(\sqrt{4n+1} - \sqrt{4n-1}) \right]$  là

- A.** 0.                      **B.**  $\frac{1}{2}$ .                      **C.**  $+\infty$ .                      **D.**  $-\frac{1}{2}$ .

**Lời giải**

Ta có:

$$\lim \left[ \sqrt{n}(\sqrt{4n+1} - \sqrt{4n-1}) \right] = \lim \frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{4n+1} + \sqrt{4n-1}} = \lim \frac{2}{\sqrt{4 + \frac{1}{n}} + \sqrt{4 - \frac{1}{n}}} = \frac{1}{2}.$$

**Câu 25:** Biết  $\lim (n+1 - \sqrt{n^2+n}) = \frac{a}{b}$  với  $a, b$  là các số nguyên dương và  $\frac{a}{b}$  là phân số tối giản. Khi đó  $a+2b$  bằng.

- A.** 3.                      **B.** 1.                      **C.** 5.                      **D.** 2.

**Lời giải**

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } \lim (n+1 - \sqrt{n^2+n}) &= \lim \frac{(n+1)^2 - (n^2+n)}{n+1 + \sqrt{n^2+n}} = \lim \frac{n+1}{n+1 + \sqrt{n^2+n}} \\ &= \lim \frac{1 + \frac{1}{n}}{1 + \frac{1}{n} + \sqrt{1 + \frac{1}{n}}} = \frac{1}{2} = \frac{a}{b} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=2 \end{cases} \Rightarrow a+2b=5. \end{aligned}$$

**Câu 26:** Giới hạn  $\lim (\sqrt{n^2+5n+1} - n)$  bằng

- A.**  $\frac{3}{2}$ .                      **B.** 0.                      **C.**  $\frac{1}{4}$ .                      **D.**  $\frac{5}{2}$ .

**Lời giải**

$$\lim (\sqrt{n^2+5n+1} - n) = \lim \frac{5n+1}{\sqrt{n^2+5n+1} + n} = \lim \frac{5 + \frac{1}{n}}{\sqrt{1 + \frac{5}{n} + \frac{1}{n^2}} + 1} = \frac{5}{2}.$$

**Câu 27:** Tính  $\lim n(\sqrt{4n^2+1} - \sqrt[3]{8n^3+n})$ .

- A.**  $+\infty$ .                      **B.** 1.                      **C.**  $-\infty$ .                      **D.**  $\frac{1}{6}$ .

**Lời giải**

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } \lim n(\sqrt{4n^2+1} - \sqrt[3]{8n^3+n}) &= \lim n \left[ (\sqrt{4n^2+1} - 2n) + (2n - \sqrt[3]{8n^3+n}) \right] \\ &= \lim \left[ n(\sqrt{4n^2+1} - 2n) + n(2n - \sqrt[3]{8n^3+n}) \right] = \lim n(\sqrt{4n^2+1} - 2n) + \lim n(2n - \sqrt[3]{8n^3+n}). \end{aligned}$$

Ta có:  $\lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt{4n^2 + 1} - 2n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{4n^2 + 1} + 2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{4 + \frac{1}{n^2}} + 2} = \frac{1}{4}.$

Ta có:  $\lim_{n \rightarrow \infty} n(2n - \sqrt[3]{8n^3 + n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-n^2}{4n^2 + 2n\sqrt[3]{8n^3 + n} + (\sqrt[3]{8n^3 + n})^2}$   
 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-1}{4 + 2\sqrt[3]{8 + \frac{1}{n^2}} + \left(\sqrt[3]{8 + \frac{1}{n^2}}\right)^2} = -\frac{1}{12}.$

Vậy  $\lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt{4n^2 + 1} - \sqrt[3]{8n^3 + n}) = \frac{1}{4} - \frac{1}{12} = \frac{1}{6}.$

**Câu 28:** Giới hạn  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{an^2 + bn + 1} - n) = \frac{3}{2} (a; b \in \mathbb{R})$ . Khi đó  $a^3 + b^2$  bằng.

A. 12.

B. 9.

C. 11.

D. 10.

**Lời giải**

Ta có:  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{an^2 + bn + 1} - n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{an^2 + bn + 1} - n)(\sqrt{an^2 + bn + 1} + n)}{\sqrt{an^2 + bn + 1} + n}$   
 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{an^2 + bn + 1 - n^2}{\sqrt{an^2 + bn + 1} + n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2(a - 1) + bn + 1}{\sqrt{an^2 + bn + 1} + n}.$

Vì:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{an^2 + bn + 1} - n) = \frac{3}{2} (a; b \in \mathbb{R}) \text{ nên } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2(a - 1) + bn + 1}{\sqrt{an^2 + bn + 1} + n} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} a - 1 = 0 \\ \frac{b}{\sqrt{a} + 1} = \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 3 \end{cases}.$$

Khi đó  $a^2 + b^2 = 1^2 + 3^2 = 10.$

**Câu 29:** Biết giới hạn  $\lim_{n \rightarrow \infty} [n(\sqrt{n^2 + 3} - \sqrt{n^2 + 2})] = \frac{a}{b}$  với  $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}^*$  và  $\frac{a}{b}$  là phân số tối giản. Khi đó, giá trị  $a^2 - b$  bằng.

A. 3.

B. -1.

C. 4.

D. 5.

**Lời giải**

Ta có:  $\lim_{n \rightarrow \infty} [n(\sqrt{n^2 + 3} - \sqrt{n^2 + 2})] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n^2 + 3} + \sqrt{n^2 + 2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{3}{n^2}} + \sqrt{1 + \frac{2}{n^2}}} = \frac{1}{2}.$

Suy ra  $\begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases}$ . Ta có  $a^2 - b = 1^2 - 2 = -1.$

**Câu 30:** Cho các số thực  $a, b, c$  thỏa mãn  $c^2 + a = 8$  và  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{an^2 + bn} - cn) = 2.$

Tính  $P = a + b + c$

A. -24.

B. 6.

C. 12.

D. 14.

**Lời giải**

Từ giả thiết  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{an^2 + bn} - cn) = 2$  suy ra  $a > 0, c > 0.$

$$\text{Ta có } \lim(\sqrt{an^2 + bn} - cn) = 2 \Leftrightarrow \lim \frac{(a - c^2)n^2 + bn}{\sqrt{an^2 + bn} + cn} = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} a - c^2 = 0 & (1) \\ \frac{b}{\sqrt{a} + c} = 2 & (2) \end{cases}$$

$$\text{Mà } c^2 + a = 8 \quad (3)$$

$$\text{Từ (1) và (3) ta có: } a = c^2 = 4 \Rightarrow c = 2$$

$$\text{Thay vào (2)} \Rightarrow b = 8$$

$$\text{Khi đó } P = a + b + c = 14.$$

**Câu 31:** Cho dãy  $(u_n)$  có  $\lim u_n = 3$ , dãy  $(v_n)$  có  $\lim v_n = 5$ . Khi đó  $\lim(u_n \cdot v_n) = ?$

- A. 15.                      B. 8.                      C. 5.                      D. 3.

**Lời giải**

Nếu  $\lim u_n = a, \lim v_n = b$  thì  $\lim(u_n \cdot v_n) = a \cdot b$ . Do đó  $\lim(u_n \cdot v_n) = 3 \cdot 5 = 15$ .

**Câu 32:** Cho  $\lim u_n = -3$ ;  $\lim v_n = 2$ . Khi đó  $\lim(u_n - v_n)$  bằng

- A. -5.                      B. -1.                      C. 5.                      D. 1.

**Lời giải**

Ta có:  $\lim(u_n - v_n) = \lim u_n - \lim v_n = -3 - 2 = -5$ .

**Câu 33:** Phát biểu nào sau đây là **sai**?

- A.  $\lim q^n = 0$  ( $|q| > 1$ ).                      B.  $\lim C = C$  ( $C$  là hằng số).  
C.  $\lim \frac{1}{n^k} = 0$  ( $k > 1$ ).                      D.  $\lim \frac{1}{n} = 0$ .

**Lời giải**

Vì  $\lim q^n = 0$  nếu  $|q| < 1$ .

**Câu 34:** Tìm  $\lim \frac{3n^4 - 2n + 4}{4n^2 + 2n + 3}$ .

- A. -1.                      B.  $+\infty$ .                      C. 0.                      D.  $\frac{3}{4}$ .

**Lời giải**

$$\text{Ta có: } \lim \frac{3n^4 - 2n + 4}{4n^2 + 2n + 3} = \lim \frac{3 - \frac{2}{n^3} + \frac{4}{n^4}}{\frac{4}{n^2} + \frac{2}{n^3} + \frac{3}{n^4}} = +\infty.$$

**Câu 35:** Giá trị  $\lim \frac{1 + 19n}{18n + 19}$  bằng

- A.  $\frac{19}{18}$ .                      B.  $\frac{1}{18}$ .                      C.  $+\infty$ .                      D.  $\frac{1}{19}$ .

**Lời giải**

$$\lim \frac{1 + 19n}{18n + 19} = \lim \frac{\frac{1}{n} + 19}{18 + \frac{19}{n}} = \frac{19}{18}.$$

**Câu 36:**  $\lim(n^2 - n + 1) \cdot (2 - n)$  bằng

**A.**  $+\infty$ .

**B.**  $-\infty$ .

**C.** 0.

**D.** -1.

**Lời giải**

Ta có  $\lim(n^2 - n + 1) = \lim n^2 \left(1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right) = +\infty$  và  $\lim(2 - n) = \lim n \left(\frac{2}{n} - 1\right) = -\infty$  nên

$$\lim(n^2 - n + 1) \cdot (-n + 2) = -\infty.$$

**Câu 37:**  $\lim(2^{2n} - 3^n)$  bằng

**A.** 3.

**B.** 2.

**C.**  $-\infty$ .

**D.**  $+\infty$ .

**Lời giải**

Ta có  $\lim(2^{2n} - 3^n) = \lim(4^n - 3^n) = \lim 4^n \left[1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n\right] = +\infty$  vì  $\lim 4^n = +\infty$  và

$$\lim \left[1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n\right] = 1 > 0.$$

**Câu 38:** Kết quả của  $\lim \frac{3^n - 2 \cdot 5^{2n}}{2^{n+1} + 5^{n+5}}$  bằng

**A.**  $-\infty$ .

**B.**  $+\infty$ .

**C.** 2

**D.**  $\frac{3}{2}$ .

**Lời giải**

$$\text{Ta có } \lim \frac{3^n - 2 \cdot 5^{2n}}{2^{n+1} + 5^{n+5}} = \lim \frac{3^n - 2 \cdot 25^n}{2 \cdot 2^n + 5^5 \cdot 5^n} = \lim \frac{\left(\frac{3}{5}\right)^n - 2 \cdot 5^n}{2 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^n + 5^5} = -\infty.$$

**Câu 39:** Biết rằng  $\lim \frac{\sqrt[3]{an^3 + 5n^2 - 7}}{\sqrt{3n^2 - n + 2}} = b\sqrt{3}$ . Tính giá trị của biểu thức  $P = \frac{a}{b^3}$ .

**A.**  $P = \frac{1}{27}$ .

**B.**  $P = 3$ .

**C.**  $P = 27$ .

**D.**  $P = \frac{1}{3}$ .

**Lời giải**

$$\text{Ta có } \lim \frac{\sqrt[3]{an^3 + 5n^2 - 7}}{\sqrt{3n^2 - n + 2}} = \lim \frac{\sqrt[3]{a + \frac{5}{n} - \frac{7}{n^3}}}{\sqrt{3 - \frac{1}{n} + \frac{2}{n^2}}} = \frac{\sqrt[3]{a}}{3} \sqrt{3} = b\sqrt{3} \Rightarrow \sqrt[3]{a} = 3b \Rightarrow P = 27.$$

**Câu 40:** Có bao nhiêu giá trị nguyên của  $a$  thỏa  $\lim(\sqrt{n^2 - 8n} - n + a^2) = 0$ ?

**A.** 0.

**B.** 2.

**C.** 1.

**D.** Vô số.

**Lời giải**

$$\lim(\sqrt{n^2-8n}-n+a^2)=\lim\frac{n^2-8n-(n-a^2)^2}{\sqrt{n^2-8n}+n-a^2}=\lim\frac{(2a^2-8)n-a^4}{\sqrt{n^2-8n}+n-a^2}=\lim\frac{2a^2-8-\frac{a^4}{n}}{\sqrt{1-\frac{8}{n}}+1-\frac{a^2}{n}}$$

$$=a^2-4.$$

Vậy  $a = \pm 2$ .

**Câu 41:**  $\lim\left[\sqrt{2n^2+2n+1}-\sqrt[3]{n^3+n^2}\right]$  bằng

- A.**  $-\infty$ .                      **B.**  $0$ .                      **C.**  $+\infty$ .                      **D.**  $2$ .

**Lời giải**

$$\text{Ta có } \lim\left[\sqrt{2n^2+2n+1}-\sqrt[3]{n^3+n^2}\right]=\lim n\left[\sqrt{2+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}-\sqrt[3]{1+\frac{1}{n}}\right]=+\infty$$

$$\text{Vì } \lim n = +\infty \text{ và } \lim\left[\sqrt{2+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}-\sqrt[3]{1+\frac{1}{n}}\right]=\sqrt{2}-1>0.$$

**Câu 42:** Cho dãy  $(u_n)$  với  $u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n + 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$ . Tính  $S_{2020} = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_{2020}$ , ta được kết quả

- A.**  $2021 - \frac{1}{2^{2020}}$ .                      **B.**  $2021 + \frac{1}{2^{2020}}$ .                      **C.**  $2020 + \frac{1}{2^{2019}}$ .                      **D.**  $2020 - \frac{1}{2^{2019}}$ .

**Lời giải**

$$S_{2020} = 2020 + \left(\frac{1}{2}\right)^1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^{2020} = 2020 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{2020}}{1 - \frac{1}{2}} = 2021 - \frac{1}{2^{2020}}.$$

**Câu 43:** Tổng vô hạn sau đây  $S = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^n} + \dots$  có giá trị bằng:

- A.**  $3$ .                      **B.**  $\frac{3}{2}$ .                      **C.**  $4$ .                      **D.**  $2$ .

**Lời giải**

Ta có  $1; \frac{1}{3}; \frac{1}{3^2}; \dots; \frac{1}{3^n}; \dots$  là một cấp số nhân lùi vô hạn với công bội  $q = \frac{1}{3} < 1$ .

$$S = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^n} + \dots = \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{3}{2}.$$

**Câu 44:** Tính tổng các nghiệm  $x \in (0; \pi)$  của phương trình  $\sin x + \sin^2 x + \sin^3 x + \dots + \sin^n x + \dots = 1$ .

- A.**  $\frac{\pi}{6}$ .                      **B.**  $\pi$ .                      **C.**  $\frac{5\pi}{6}$ .                      **D.**  $\frac{2\pi}{3}$ .

**Lời giải**

Với  $x = \frac{\pi}{2}$  thay vào (1) ta có  $1 + 1 + 1 + \dots + 1 + \dots = 1$  vô lý.

Với  $x \in (0; \pi) \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} \right\}$  thì  $\sin x; \sin^2 x; \sin^3 x; \sin^n x..$  là CSN lùi vô hạn công bội  $q = \sin x$ ..

Do đó, VT(1) là tổng của CSN lùi vô hạn nên ta được

$$(1) \Leftrightarrow \frac{\sin x}{1 - \sin x} = 1 \Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{2} \xrightarrow{x \in (0; \pi) \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} \right\}} \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} \\ x = \frac{5\pi}{6} \end{cases}.$$

Vậy tổng các nghiệm  $x \in (0; \pi)$  là  $\frac{\pi}{6} + \frac{5\pi}{6} = \pi$ .

**Câu 45:** Giới hạn  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3\sqrt{5n^2 + n}}{2(3n+1)} = \frac{a\sqrt{5}}{b}$  (với  $a, b \in \mathbb{Q}^*$  và  $\frac{a}{b}$  là phân số tối giản). Tổng  $T = a + b$  bằng

- A. 9                                      B. 3                                      C. 8                                      D. 5

**Lời giải**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3\sqrt{5n^2 + n}}{2(3n+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3\sqrt{5 + \frac{1}{n}}}{2\left(3 + \frac{1}{n}\right)} = \frac{1\sqrt{5}}{2} \Rightarrow a = 1; b = 2 \Rightarrow T = 3.$$

**Câu 46:** Tính giới hạn  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{n+1} - 4.5^n}{2.5^n + 5.4^{n+1}}$ .

- A.  $-\frac{1}{7}$ .                                      B. 2.                                      C. -2.                                      D.  $-\frac{1}{5}$ .

**Lời giải**

$$\text{Ta có } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{n+1} - 4.5^n}{2.5^n + 5.4^{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3.3^n - 4.5^n}{2.5^n + 20.4^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3\left(\frac{3}{5}\right)^n - 4}{2 + 20\left(\frac{4}{5}\right)^n} = -2.$$

**Câu 47:** Giá trị của tham số  $a$  để  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 - n + 4}{an^2 + n + 3} = \frac{4}{3}$  là

- A.  $a = \frac{8}{3}$ .                                      B.  $a = \frac{2}{3}$ .                                      C.  $a = \frac{3}{2}$ .                                      D.  $a = 6$ .

**Lời giải:**

$$\text{Ta có: } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 - n + 4}{an^2 + n + 3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 - \frac{1}{n} + \frac{4}{n^2}}{a + \frac{1}{n} + \frac{3}{n^2}} = \frac{2}{a}. \text{ Theo giả thiết: } \frac{2}{a} = \frac{4}{3} \Leftrightarrow a = \frac{3}{2}.$$

**Câu 48:** Biết  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n+1}{2n+5} = a$  và  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n + 4^n}{4^{n+1} + 3} = b$ . Tổng  $a + 4b$  bằng

- A. 5.                                      B. 4.                                      C. 2.                                      D. 3.

**Lời giải**

Ta có:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n+1}{2n+5} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 + \frac{1}{n}}{2 + \frac{5}{n}} = 2 \Rightarrow a = 2$  và

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n + 4^n}{4^{n+1} + 3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n + 4^n}{4 \cdot 4^n + 3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{3}{4}\right)^n + 1}{4 + 3 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^n} = \frac{1}{4} \Rightarrow b = \frac{1}{4}. \text{ Vậy } a + 4b = 3.$$

**Câu 49:** Cho  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + an} - n) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ . Số thực  $a$  thuộc khoảng nào sau đây?

- A.  $(2;3)$ .                      B.  $(1;2)$ .                      C.  $(-1;0)$ .                      D.  $(0;1)$ .

**Lời giải**

Ta có  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + an} - n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{an}{\sqrt{n^2 + an} + n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a}{\sqrt{1 + \frac{a}{n}} + 1} = \frac{a}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow a = \sqrt{2} \in (1;2)$ .

**Câu 50:** Cho  $a, b$  là các số thực thỏa mãn  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{an^3 + 2bn^2 + n + 2023}{2n^2 + 3} = 1$ . Tổng  $2a + b$  bằng

- A. 1.                      B. 4.                      C. 2.                      D. 3.

**Lời giải:**

Do  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{an^3 + 2bn^2 + n + 2023}{2n^2 + 3} = 1 \Rightarrow a = 0$ . (vì nếu  $a \neq 0$  thì bậc cao nhất của tử lớn hơn bậc cao nhất của mẫu thì giới hạn là vô cực).

Lúc đó:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{an^3 + 2bn^2 + n + 2023}{2n^2 + 3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2bn^2 + n + 2023}{2n^2 + 3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2b + \frac{1}{n} + \frac{2023}{n^2}}{2 + \frac{3}{n^2}} = b = 1$ .

Vậy  $2a + b = 1$

**Câu 51:** Cho  $a, b$  là các số thực thỏa mãn  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + an + 2} - \sqrt{n^2 + bn + 1}) = 1$ . Khẳng định nào sau đây đúng?

- A.  $a + b = 2$ .                      B.  $a - b = 2$ .                      C.  $a + b = 1$ .                      D.  $a - b = 1$ .

**Lời giải**

Do  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + an + 2} - \sqrt{n^2 + bn + 1}) = 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n^2 + an + 2) - (n^2 + bn + 1)}{\sqrt{n^2 + an + 2} + \sqrt{n^2 + bn + 1}} = 1$

$$\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(a-b)n + 1}{\sqrt{n^2 + an + 2} + \sqrt{n^2 + bn + 1}} = 1 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(a-b) + \frac{1}{n}}{\sqrt{1 + \frac{a}{n} + \frac{2}{n^2}} + \sqrt{1 + \frac{b}{n} + \frac{1}{n^2}}} = 1 \Leftrightarrow \frac{a-b}{2} = 1 \Leftrightarrow a - b = 2.$$

**Câu 52:** Giá trị  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \dots + \frac{n}{n^2} \right)$  bằng

- A. 1.                      B.  $\frac{1}{2}$ .                      C.  $\frac{1}{3}$ .                      D. 0.

**Lời giải**

Ta có:  $1; 2; 3; \dots; n$  là một cấp số cộng với  $u_1 = 1; d = 1$  suy ra:  $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

$$\text{Do đó: } \lim \left( \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \dots + \frac{n}{n^2} \right) = \lim \left( \frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n^2} \right) = \lim \frac{n+1}{2n} = \lim \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} \right) = \frac{1}{2}.$$

**Câu 53:** Biết  $\lim \frac{2n^4 + n + 1}{n - n^3 + 3n^4} = \frac{a}{b}$  với  $\frac{a}{b}$  là phân số tối giản. Tính  $a + 2b$ .

- A.** 8.                      **B.** 7.                      **C.** 6.                      **D.** 9.

**Lời giải**

$$\lim \frac{2n^4 + n + 1}{n - n^3 + 3n^4} = \lim \frac{n^4 \left( 2 + \frac{1}{n^3} + \frac{1}{n^4} \right)}{n^4 \left( \frac{1}{n^4} - \frac{1}{n} + 3 \right)} = \lim \frac{2 + \frac{1}{n^3} + \frac{1}{n^4}}{\frac{1}{n^4} - \frac{1}{n} + 3} = \frac{2}{3}.$$

Suy ra  $a = 2; b = 3 \Rightarrow a + 2b = 8$ .

**Câu 54:** Có bao nhiêu giá trị nguyên của  $a$  để  $\lim (\sqrt{n^2 - 4n + 7} + a - n) = 0$ .

- A.** 3.                      **B.** 1.                      **C.** 2.                      **D.** 0.

**Lời giải**

$$\lim (\sqrt{n^2 - 4n + 7} + a - n) = \lim \frac{-4n + 7 + 2an - a^2}{\sqrt{n^2 - 4n + 7} - (a - n)} = \lim \frac{2a - 4 + \frac{7 - a^2}{n}}{\sqrt{1 - \frac{4}{n} + \frac{7}{n^2}} - \frac{a}{n} + 1} = a - 2$$

Để  $\lim (\sqrt{n^2 - 4n + 7} + a - n) = 0$  thì  $a - 2 = 0 \Leftrightarrow a = 2$ .

**Câu 55:** Cho số  $a = 3,13131313\dots$  là số thập phân vô hạn tuần hoàn có chu kì là 13, số  $a$  được biểu diễn dưới dạng phân số tối giản dạng  $a = \frac{x}{y}$ , trong đó  $x$  và  $y$  là các số nguyên dương. Tìm tổng  $x + y$ .

- A.**  $x + y = 490$ .                      **B.**  $x + y = 409$ .                      **C.**  $x + y = 211$ .                      **D.**  $x + y = 130$ .

**Lời giải**

$$\text{Ta có } a = 3 + \frac{13}{100} + \frac{13}{100^2} + \frac{13}{100^3} + \dots = 3 + \frac{\frac{13}{100}}{1 - \frac{1}{100}} = \frac{310}{99}.$$

$$\text{Suy ra } \begin{cases} x = 310 \\ y = 99 \end{cases} \Rightarrow x + y = 409.$$

**Câu 56:** Biết  $\lim \frac{2n^4 + n + 1}{n - n^3 + 3n^4} = \frac{a}{b}$  với  $\frac{a}{b}$  là phân số tối giản. Tính  $a + 2b$ .

- A.** 8.                      **B.** 7.                      **C.** 6.                      **D.** 9.

**Lời giải**

$$\lim \frac{2n^4 + n + 1}{n - n^3 + 3n^4} = \lim \frac{n^4 \left( 2 + \frac{1}{n^3} + \frac{1}{n^4} \right)}{n^4 \left( \frac{1}{n^4} - \frac{1}{n} + 3 \right)} = \lim \frac{2 + \frac{1}{n^3} + \frac{1}{n^4}}{\frac{1}{n^4} - \frac{1}{n} + 3} = \frac{2}{3}.$$

Suy ra  $a = 2; b = 3 \Rightarrow a + 2b = 8$ .

**Câu 57:** Biết  $\lim \frac{2n^2 + 3n^3}{n^3 + 2} = \frac{a}{b}$ , với  $\frac{a}{b}; (a; b \in \mathbb{Q})$  là phân số tối giản. Tính  $a + b$ .

- A. 3.                      **B. 4.**                      C. 5.                      D. 6.

**Lời giải**

$$\lim \frac{2n^2 + 3n^3}{n^3 + 2} = \lim \frac{n^3 \left( \frac{2}{n} + 3 \right)}{n^3 \left( 1 + \frac{2}{n^3} \right)} = \lim \frac{\frac{2}{n} + 3}{1 + \frac{2}{n^3}} = 3 \text{ suy ra } a = 3; b = 1 \Rightarrow a + b = 4.$$

**Câu 58:** Giá trị của giới hạn  $\lim \left( \sqrt{n^2 + 2^{2023}n} - \sqrt{n^2 - 2^{2023}n} \right)$  là

- A.  $2^{2024}$ .                      **B.  $2^{2023}$ .**                      C. 0.                      D.  $+\infty$ .

**Lời giải**

Ta có

$$\begin{aligned} \lim \left( \sqrt{n^2 + 2^{2023}n} - \sqrt{n^2 - 2^{2023}n} \right) &= \lim \frac{2^{2024}n}{\sqrt{n^2 + 2^{2023}n} + \sqrt{n^2 - 2^{2023}n}} \\ &= \lim \frac{2^{2024}}{\sqrt{1 + \frac{2^{2023}}{n}} + \sqrt{1 - \frac{2^{2023}}{n}}} = 2^{2023}. \end{aligned}$$

**Câu 59:** Có bao nhiêu giá trị nguyên của  $a$  để  $\lim \left( \sqrt{n^2 - 4n + 7} + a - n \right) = 0$ .

- A. 3.                      **B. 1.**                      C. 2.                      D. 0.

**Lời giải**

$$\lim \left( \sqrt{n^2 - 4n + 7} + a - n \right) = \lim \frac{-4n + 7 + 2an - a^2}{\sqrt{n^2 - 4n + 7} - (a - n)} = \lim \frac{2a - 4 + \frac{7 - a^2}{n}}{\sqrt{1 - \frac{4}{n} + \frac{7}{n^2}} - \frac{a}{n} + 1} = a - 2$$

Để  $\lim \left( \sqrt{n^2 - 4n + 7} + a - n \right) = 0$  thì  $a - 2 = 0 \Leftrightarrow a = 2$ .

**Câu 60:** Có bao nhiêu giá trị nguyên của  $a$  thỏa  $\lim \left( \sqrt{n^2 - 8n} - n + a^2 \right) = 0$ .

- A. 0.                      **B. 2.**                      C. 1.                      D. Vô số.

**Lời giải**

Ta có

$$\lim \left( \sqrt{n^2 - 8n} - n + a^2 \right) = \lim \frac{n^2 - 8n - (n - a^2)^2}{\sqrt{n^2 - 8n} + n - a^2} = \lim \frac{(2a^2 - 8)n - a^4}{\sqrt{n^2 - 8n} + n - a^2} = \lim \frac{2a^2 - 8 - \frac{a^4}{n}}{\sqrt{1 - \frac{8}{n}} + 1 - \frac{a^2}{n}}$$

$$= a^2 - 4.$$

Vậy  $a = \pm 2$ .

**Câu 61:** Giá trị của  $E = \lim \left( \sqrt{n^2 + n + 1} - \sqrt[3]{2n^3 - 3n^2 + 1} \right)$  bằng:

**A.**  $+\infty$ .

**B.**  $-\infty$ .

**C.** 0.

**D.** 1.

**Lời giải**

$$E = \lim \left( \sqrt{n^2 + n + 1} - \sqrt[3]{2n^3 - 3n^2 + 1} \right) = \lim n \left( \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} - \sqrt[3]{2 - \frac{3}{n} + \frac{1}{n^3}} \right).$$

Ta có

$$\begin{cases} \lim n = +\infty \\ \lim \left( \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} - \sqrt[3]{2 - \frac{3}{n} + \frac{1}{n^3}} \right) = 1 - \sqrt[3]{2} < 0 \end{cases} \Rightarrow E = \lim \left( \sqrt{n^2 + n + 1} - \sqrt[3]{2n^3 - 3n^2 + 1} \right) = -\infty$$

**Câu 62:** Cho dãy số  $(u_n)$  xác định bởi  $u_1 = 3, 2u_{n+1} = u_n + 1, \forall n \geq 1$ . Gọi  $S_n$  là tổng  $n$  số hạng đầu tiên của dãy số  $(u_n)$ . Tính  $\lim S_n$ .

**A.**  $\lim S_n = -\infty$ .

**B.**  $\lim S_n = 1$ .

**C.**  $\lim S_n = +\infty$ .

**D.**  $\lim S_n = -1$ .

**Lời giải**

Ta có  $2u_{n+1} = u_n + 1, \forall n \geq 1 \Leftrightarrow u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{2}, \forall n \geq 1$ . Đặt  $v_n = u_n - 1, \forall n \geq 1$ .

Khi đó:  $v_{n+1} = u_{n+1} - 1 = \frac{1}{2}(u_n - 1) = \frac{1}{2}v_n, \forall n \geq 1$ . Vậy  $(v_n)$  là một cấp số nhân có công bội

$q = \frac{1}{2}$ . Gọi  $T_n$  là tổng  $n$  số hạng đầu tiên của  $(v_n)$ .

$$\text{Ta có: } T_n = v_1 \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} = 2v_1 \left[ 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \right] \Rightarrow S_n = T_n + n \Rightarrow \lim S_n = +\infty$$

**Câu 63:** Cho dãy số  $(u_n)$  với  $u_n = \frac{1}{\sqrt{n^2 + 1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2 + n}}$ . Giới hạn của dãy số bằng:

**A.**  $+\infty$ .

**B.** 0.

**C.**  $-\infty$ .

**D.** 1.

**Lời giải**

Với mỗi số nguyên  $k$  mà  $1 \leq k \leq n$ , ta có:  $\frac{1}{\sqrt{n^2 + n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^2 + k}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^2 + 1}}$ .

Suy ra  $\frac{n}{\sqrt{n^2 + n}} \leq u_n \leq \frac{n}{\sqrt{n^2 + 1}} \quad \forall n$ .

Mà  $\lim \frac{n}{\sqrt{n^2 + n}} = \lim \frac{n}{\sqrt{n^2 + 1}} = 1$  nên  $\lim u_n = 1$ .

**Câu 64:**  $\lim \frac{6\sin n - 8\cos n}{3n^2 + 1}$  bằng

A. -1.

B. 0.

C.  $+\infty$ .

D. 1.

**Lời giải**

$$\text{Vì } 0 \leq \left| \frac{6\sin n - 8\cos n}{3n^2 + 1} \right| \leq \frac{10}{3n^2 + 1} \text{ và } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{10}{3n^2 + 1} = 0 \text{ nên } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6\sin n - 8\cos n}{3n^2 + 1} = 0.$$

**Câu 65:**  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^2} \cdot \cos(n!)}{2n+1}$  bằng

A. -1.

B. 0.

C.  $+\infty$ .

D. 1.

**Lời giải**

$$\text{Vì } -\frac{\sqrt[3]{n^2}}{2n+1} \leq \frac{\sqrt[3]{n^2} \cdot \cos(n!)}{2n+1} \leq \frac{\sqrt[3]{n^2}}{2n+1} \text{ và } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-\sqrt[3]{n^2}}{2n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^2}}{2n+1} = 0 \text{ nên } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^2} \cdot \cos(n!)}{2n+1} = 0.$$

**Câu 66:**  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( 5 - \frac{n \cdot \cos 2n}{n^2 + 3} \right)$  bằng

A. 5.

B. -5.

C. 0.

D. 1.

**Lời giải**

$$\text{Vì } 0 \leq \left| \frac{n \cdot \cos 2n}{n^2 + 3} \right| \leq \frac{n}{n^2 + 3} \text{ và } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n^2 + 3} = 0 \text{ nên } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \cdot \cos 2n}{n^2 + 3} = 0.$$

$$\text{Suy ra } \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 5 - \frac{n \cdot \cos 2n}{n^2 + 3} \right) = 5 - 0 = 5.$$

**Câu 67:** Chọn kết quả đúng của  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2 - 2n + 5} - \sqrt{n^4 + 3n^2 + 1}}{3 + 5n}$ :

A.  $-\infty$ .

B. 0.

C.  $\frac{1}{5}$ .

D.  $+\infty$ .

**Lời giải**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2 - 2n + 5} - \sqrt{n^4 + 3n^2 + 1}}{3 + 5n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^3} + \frac{5}{n^4}} - \sqrt{1 + \frac{3}{n^2} + \frac{1}{n^4}}}{\frac{3}{n^2} + \frac{5}{n}}.$$

$$\text{Ta có } \begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sqrt{\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^3} + \frac{5}{n^4}} - \sqrt{1 + \frac{3}{n^2} + \frac{1}{n^4}} \right) = -1 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{3}{n^2} + \frac{5}{n} \right) = 0 \\ \frac{3}{n^2} + \frac{5}{n} > 0, \forall n > 0 \end{cases} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^3} + \frac{5}{n^4}} - \sqrt{1 + \frac{3}{n^2} + \frac{1}{n^4}}}{\frac{3}{n^2} + \frac{5}{n}} = -\infty.$$

**Câu 68:** Biết  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + 3n^3}{n^3 + 2} = \frac{a}{b}$ , với  $\frac{a}{b}; (a; b \in \mathbb{Q})$  là phân số tối giản. Tính  $a + b$ .

A. 3.

B. 4.

C. 5.

D. 6.

**Lời giải**

$$\lim \frac{2n^2 + 3n^3}{n^3 + 2} = \lim \frac{n^3 \left( \frac{2}{n} + 3 \right)}{n^3 \left( 1 + \frac{2}{n^3} \right)} = \lim \frac{\frac{2}{n} + 3}{1 + \frac{2}{n^3}} = 3 \text{ suy ra } a = 3; b = 1 \Rightarrow a + b = 4.$$

**Câu 69:**  $\lim \left( \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \frac{3}{n^2} + \dots + \frac{n}{n^2} \right)$  bằng

- A. 1.                      B. 0.                      C.  $\frac{1}{3}$ .                      D.  $\frac{1}{2}$ .

**Lời giải**

$$\lim \left( \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \frac{3}{n^2} + \dots + \frac{n}{n^2} \right) = \lim \left( \frac{1+2+3+\dots+n}{n^2} \right) = \lim \left( \frac{n(n+1)}{2n^2} \right) = \lim \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} \right) = \frac{1}{2}$$

**Câu 70:** Cho dãy số  $(u_n)$  xác định bởi:  $u_n = \frac{1}{n^2} + \frac{3}{n^2} + \dots + \frac{2n-1}{n^2}$  với  $n \in \mathbb{N}^*$ . Giá trị của  $\lim u_n$  bằng:

- A. 0.                      B.  $+\infty$ .                      C.  $-\infty$ .                      D. 1

**Lời giải**

$$\text{Ta có } 1+3+\dots+(2n-1) = n^2 \longrightarrow \frac{1}{n^2} + \frac{3}{n^2} + \dots + \frac{2n-1}{n^2} = \frac{1+3+\dots+(2n-1)}{n^2} = \frac{n^2}{n^2} = 1$$

Suy ra  $\lim u_n = 1$ .

**Câu 71:** Cho dãy số  $(u_n)$  với  $u_n = \frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + \dots + \frac{1}{(2n-1).(2n+1)}$ . Tính  $\lim u_n$ .

- A.  $\frac{1}{2}$ .                      B. 0.                      C. 1.                      D.  $\frac{1}{4}$ .

**Lời giải**

$$\begin{aligned} \text{Ta có : } u_n &= \frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + \dots + \frac{1}{(2n-1).(2n+1)} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{1} - \frac{1}{2n+1} \right) = \frac{n}{2n+1} \end{aligned}$$

$$\text{Suy ra : } \lim u_n = \lim \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2}.$$

**Câu 72:** Tìm  $\lim u_n$  biết  $u_n = \frac{1}{2^2-1} + \frac{1}{3^2-1} + \dots + \frac{1}{n^2-1}$ .

- A.  $\frac{3}{4}$ .                      B.  $\frac{3}{5}$ .                      C.  $\frac{2}{3}$ .                      D.  $\frac{4}{3}$ .

**Lời giải**

$$\begin{aligned} \text{Ta có : } u_n &= \frac{1}{2^2-1} + \frac{1}{3^2-1} + \dots + \frac{1}{n^2-1} = \frac{1}{1.3} + \frac{1}{2.4} + \frac{1}{3.5} + \dots + \frac{1}{(n-1).n} \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{n} \right) = \frac{3}{4} - \frac{1}{2(n+1)}. \end{aligned}$$

$$\text{Suy ra : } \lim u_n = \lim \left[ \frac{3}{4} - \frac{1}{2(n+1)} \right] = \frac{3}{4}.$$

**Câu 73:** Tính giới hạn  $\lim \left[ \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} \right]$ .

A. 0.

B. 2.

C. 1.

D.  $\frac{3}{2}$ .

**Lời giải**

Ta có:  $\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$ .

Vậy  $\lim \left[ \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} \right] = \lim \left( 1 - \frac{1}{n+1} \right) = 1$ .

**Câu 74:** Tìm giới hạn sau  $\lim \frac{1+2+2^2+\dots+2^n}{1+3+3^2+\dots+3^n}$

A. 0.

B. 2.

C. 1.

D.  $\frac{3}{2}$ .

**Lời giải**

$$\lim \frac{1+2+2^2+\dots+2^n}{1+3+3^2+\dots+3^n} = \lim \frac{\frac{1-2^{n+1}}{-1}}{\frac{1-3^{n+1}}{-2}} = \lim \frac{(1-2^{n+1}) \cdot 2}{1-3^{n+1}} = \lim \frac{\left( \left( \frac{1}{3} \right)^{n+1} - \left( \frac{2}{3} \right)^{n+1} \right) \cdot 2}{\left( \frac{1}{3} \right)^{n+1} - 1} = 0$$

**Câu 75:** Tìm  $L = \lim \left( \frac{1}{1} + \frac{1}{1+2} + \dots + \frac{1}{1+2+\dots+n} \right)$

A.  $L = \frac{5}{2}$ .

B.  $L = +\infty$ .

C.  $L = 2$ .

D.  $L = \frac{3}{2}$ .

**Lời giải**

Ta có  $1+2+3+\dots+k$  là tổng của cấp số cộng có  $u_1=1$ ,  $d=1$  nên  $1+2+3+\dots+k = \frac{(1+k)k}{2}$

$$\Rightarrow \frac{1}{1+2+\dots+k} = \frac{2}{k(k+1)} = \frac{2}{k} - \frac{2}{k+1}, \forall k \in \mathbb{N}^*.$$

$$L = \lim \left( \frac{2}{1} - \frac{2}{2} + \frac{2}{2} - \frac{2}{3} + \frac{2}{3} - \frac{2}{4} + \dots + \frac{2}{n} - \frac{2}{n+1} \right) = \lim \left( \frac{2}{1} - \frac{2}{n+1} \right) = 2.$$

**Câu 76:** Với  $n$  là số nguyên dương, đặt  $S_n = \frac{1}{1\sqrt{2}+2\sqrt{1}} + \frac{1}{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{n\sqrt{n+1}+(n+1)\sqrt{n}}$ . Khi đó

$\lim S_n$  bằng

A.  $\frac{1}{\sqrt{2}+1}$

B.  $\frac{1}{\sqrt{2}-1}$ .

C. 1.

D.  $\frac{1}{\sqrt{2}+2}$ .

**Lời giải**

$$\text{Ta có } \frac{1}{n\sqrt{n+1}+(n+1)\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{n+1}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})} = \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n}\sqrt{n+1}} = \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}.$$

Suy ra

$$S_n = \frac{1}{1\sqrt{2}+2\sqrt{1}} + \frac{1}{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{n\sqrt{n+1}+(n+1)\sqrt{n}}.$$

$$= \frac{1}{1} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots - \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}}.$$

Suy ra  $\lim S_n = 1$

**Câu 77:** Đặt  $f(n) = (n^2 + n + 1)^2 + 1$ , xét dãy số  $(u_n)$  sao cho  $u_n = \frac{f(1) \cdot f(3) \cdot f(5) \dots f(2n-1)}{f(2) \cdot f(4) \cdot f(6) \dots f(2n)}$ . Tìm  $\lim n\sqrt{u_n}$ .

**A.**  $\lim n\sqrt{u_n} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ .      **B.**  $\lim n\sqrt{u_n} = \sqrt{3}$ .      **C.**  $\lim n\sqrt{u_n} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ .      **D.**  $\lim n\sqrt{u_n} = \sqrt{2}$ .

**Lời giải**

Ta có  $f(n) = (n^2 + n + 1)^2 + 1 = (n^2 + 1)[(n+1)^2 + 1]$ .

Do đó  $u_n = \frac{(1^2+1)(2^2+1)(3^2+1)(4^2+1)\dots[(2n-1)^2+1][4n^2+1]}{(2^2+1)(3^2+1)(4^2+1)(5^2+1)\dots[4n^2+1][(2n+1)^2+1]}$

$$\Rightarrow u_n = \frac{2}{(2n+1)^2+1} \Rightarrow n\sqrt{u(n)} = \sqrt{\frac{2n^2}{(2n+1)^2+1}}.$$

$$\lim n\sqrt{u(n)} = \lim \sqrt{\frac{2n^2}{(2n+1)^2+1}} = \lim \sqrt{\frac{2}{\left(2+\frac{1}{n}\right)^2 + \frac{1}{n^2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

**Câu 78:** Với  $n$  là số tự nhiên lớn hơn 2, đặt  $S_n = \frac{1}{C_3^3} + \frac{1}{C_4^3} + \frac{1}{C_5^4} + \dots + \frac{1}{C_n^3}$ . Tính  $\lim S_n$ .

**A.** 1.      **B.**  $\frac{3}{2}$ .      **C.** 3.      **D.**  $\frac{1}{3}$ .

**Lời giải**

Ta có  $C_n^3 = \frac{n!}{3!(n-3)!} = \frac{(n-3)!(n-2)(n-1)n}{(n-3)! \times 6} = \frac{n(n-1)(n-2)}{6} \Rightarrow \frac{1}{C_n^3} = \frac{6}{n(n-1)(n-2)}$

Vậy ta có  $S_n = \frac{6}{1.2.3} + \frac{6}{2.3.4} + \frac{6}{3.4.5} + \dots + \frac{6}{n(n-1)(n-2)}$

Nhận xét  $\frac{2}{1.2.3} = \frac{1}{1.2} - \frac{1}{2.3}$ ;  $\frac{2}{2.3.4} = \frac{1}{2.3} - \frac{1}{3.4}$ ; ...;  $\frac{2}{(n-2)(n-1)n} = \frac{1}{(n-2)(n-1)} - \frac{1}{(n-1)n}$

$$\Rightarrow S_n = 3\left(\frac{1}{1.2} - \frac{1}{2.3} + \frac{1}{2.3} - \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{n-2} - \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) = 3\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n}\right) = 3\left(\frac{n-2}{2n}\right) = \frac{3n-6}{2n}$$

Vậy  $\lim S_n = \lim \left(\frac{3n-6}{2n}\right) = \lim \left(\frac{3-\frac{6}{n}}{2}\right) = \frac{3}{2}$ .

**Câu 79:** Cho dãy số  $(u_n)$  với  $u_n = \sqrt{n^2 + an + 5} - \sqrt{n^2 + 1}$ , trong đó  $a$  là tham số thực. Tìm  $a$  để  $\lim u_n = -1$ .

**A.** 3.      **B.** 2.      **C.** -2.      **D.** -3.

**Lời giải**

$$\begin{aligned}\lim u_n &= \lim \left( \sqrt{n^2 + an + 5} - \sqrt{n^2 + 1} \right) = \lim \frac{an + 4}{\sqrt{n^2 + an + 5} + \sqrt{n^2 + 1}} \\ &= \lim \frac{a + \frac{4}{n}}{\sqrt{1 + \frac{a}{n} + \frac{5}{n^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{n^2}}} = \frac{a}{2}\end{aligned}$$

Ta có:  $\lim u_n = -1 \Leftrightarrow \frac{a}{2} = -1 \Leftrightarrow a = -2$ .

**Câu 80:** Một hình gồm các khối cầu xếp chồng lên nhau tạo thành một cột thẳng đứng. Biết rằng mỗi khối cầu có bán kính gấp đôi bán kính của khối cầu nằm ngay trên nó và bán kính khối cầu dưới cùng là 50 cm. Hỏi mệnh đề nào sau đây đúng.

- A.** Chiều cao của mô hình không quá 1,5 mét.      **B.** Chiều cao của mô hình tối đa là 2 mét.  
**C.** Chiều cao của mô hình dưới 2 mét.              **D.** Mô hình có thể đạt được chiều cao tùy ý.

### Lời giải

Giả sử có  $n$  khối cầu

Gọi bán kính của khối cầu thứ nhất (khối cầu dưới cùng) là  $R_1 = \frac{1}{2}$  mét.

Gọi bán kính của khối cầu thứ 2 (ngay trên khối cầu thứ nhất) là  $R_2$ .

Gọi bán kính của khối cầu thứ  $n$  (ngay trên khối cầu thứ  $n-1$ ) là  $R_n$  ( $n \in \mathbb{N}^*, n \geq 2$ ).

Khi đó dãy các số  $R_1, R_2, \dots, R_n, \dots$  là một cấp số nhân với công bội  $q = \frac{1}{2}$ .

Chiều cao của mô hình là  $h = 2(R_1 + R_2 + \dots + R_n) = 2 \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} = 2 \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$  (mét).

Suy ra với  $h = 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} < 2, \forall n \in \mathbb{N}^*$ . Do đó chiều cao của mô hình dưới 2 mét.

**Câu 81:** Tam giác mà ba đỉnh của nó là ba trung điểm ba cạnh của tam giác  $ABC$  được gọi là *tam giác trung bình* của tam giác  $ABC$ . Ta xây dựng dãy các tam giác  $A_1B_1C_1, A_2B_2C_2, A_3B_3C_3, \dots$  sao cho  $A_1B_1C_1$  là một tam giác đều cạnh bằng  $x$  và với mỗi số nguyên dương  $n \geq 2$ , tam giác  $A_nB_nC_n$  là tam giác trung bình của tam giác  $A_{n-1}B_{n-1}C_{n-1}$ . Với mỗi số nguyên dương  $n$ , kí hiệu  $S_n$  tương ứng là diện tích tam giác  $A_nB_nC_n$ . Tính tổng  $S = S_1 + S_2 + \dots + S_n + \dots$

- A.**  $\frac{\sqrt{3}}{3}x^2$ .                      **B.**  $\sqrt{3}x^2$ .                      **C.**  $\frac{\sqrt{3}}{2}x^2$ .                      **D.**  $\frac{2\sqrt{3}}{3}x^2$ .

### Lời giải

Với  $n=1$  thì tam giác đều  $A_1B_1C_1$  có cạnh bằng  $x$  nên diện tích tam giác  $A_1B_1C_1$  là  $S_1 = \frac{\sqrt{3}}{4}x^2$ .

Với  $n=2$  thì tam giác đều  $A_2B_2C_2$  có cạnh bằng  $\frac{x}{2}$  nên diện tích tam giác  $A_2B_2C_2$  là

$$S_2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \left( \frac{x}{2} \right)^2.$$

....

Như vậy tam giác đều  $A_nB_nC_n$  có cạnh bằng  $\frac{x}{2^{n-1}}$  nên diện tích tam giác  $A_nB_nC_n$  là

$$S_n = \frac{\sqrt{3}}{4} \left( \frac{x}{2^{n-1}} \right)^2.$$

Khi đó ta được dãy  $S_1, S_2, \dots, S_n, \dots$  là một cấp số nhân lùi vô hạn với số hạng đầu  $u_1 = S_1 = \frac{\sqrt{3}}{4} x^2$  và công bội  $q = \frac{1}{4}$ .

$$\text{Do đó tổng } S = S_1 + S_2 + \dots + S_n + \dots = \frac{u_1}{1-q} = \frac{\sqrt{3}}{3} x^2.$$

## PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

**Câu 1:** Biết giới hạn  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{2-3n} = a$ . Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- a) Giá trị  $a$  lớn hơn 0.
- b)  $x = a$  là trục đối xứng của parabol  $(P): y = 3x^2 + 4x - 7$ .
- c) Bộ ba số  $-\frac{5}{3}; a; \frac{1}{3}$  lập thành một cấp số cộng với công sai bằng 2.
- d) Cho cấp số nhân  $(u_n)$  với công bội  $q = 3$  và  $u_1 = a$  thì  $u_3 = 6$ .

### Lời giải

$$\text{a) Sai: Ta có: } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{-3n+2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \left( 2 + \frac{1}{n} \right)}{n \left( -3 + \frac{2}{n} \right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{1}{n}}{-3 + \frac{2}{n}} = \frac{-2}{3} \text{ suy ra: } a = -\frac{2}{3}$$

b) Đúng: Trục đối xứng của parabol  $(P): y = 3x^2 + 4x - 7$  là  $x = -\frac{4}{2.3} = -\frac{2}{3}$

c) Sai: Ba số  $-\frac{5}{3}; -\frac{2}{3}; \frac{1}{3}$  tạo thành một cấp số cộng với công sai bằng 1

d) Sai: Cho cấp số nhân  $(u_n)$  với công bội  $q = 3$  và  $u_1 = a = -\frac{2}{3} \Rightarrow u_3 = u_1 \cdot q^2 = -\frac{2}{3} \cdot 3^2 = -6$

**Câu 2:** Giả sử ta có  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$  và  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = b$ . Với  $(a; b \in \mathbb{R})$ . Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a)  $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot g(x)] = a \cdot b$ .

b)  $\lim_{x \rightarrow x_0} [2f(x) - g(x)] = 2a - b$ .

c)  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a}{b}$ .

d)  $\lim_{x \rightarrow x_0} \left[ \frac{f(x) + 2g(x)}{f(x)} \right] = a + \frac{2b}{a}$  với  $(a \neq 0)$ .

### Lời giải

a) Đúng: Vì theo định lý về giới hạn hữu hạn.

b) Đúng: Vì  $\lim_{x \rightarrow x_0} [cf(x)] = c \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) (c \in \mathbb{R})$  nên  $\lim_{x \rightarrow x_0} [2f(x) - g(x)] = 2a - b$ .

c) Sai: Vì b có thể bằng 0.

d) Sai: Vì  $\lim_{x \rightarrow x_0} \left[ \frac{f(x) + 2g(x)}{f(x)} \right] = \lim_{x \rightarrow x_0} \left[ 1 + \frac{2g(x)}{f(x)} \right] = 1 + \frac{2b}{a}; (a \neq 0)$ .

**Câu 3:** Tính được các giới hạn. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a)  $\lim (\sqrt{2})^n = -\infty$

b)  $\lim \pi^n = 0$

c)  $\lim (2n^3 + 2n^2 - 4) = +\infty$

d)  $\lim (-5n^4 + n^3 - 4n) = -\infty$

### Lời giải

a) Sai: Ta có:  $\lim (\sqrt{2})^n = +\infty$  (do  $\sqrt{2} > 1$ )

b) Sai: Ta có:  $\lim \pi^n = +\infty$  (do  $\pi > 1$ )

c) Đúng: Ta có  $\lim (2n^3 + 2n^2 - 4) = \lim n^3 \cdot \left( 2 + \frac{2}{n} - \frac{4}{n^3} \right) = +\infty$ .

$$\text{Vì } \begin{cases} \lim n^3 = +\infty \\ \lim \left( 2 + \frac{2}{n} - \frac{4}{n^3} \right) = 2 > 0 \end{cases}$$

d) Đúng: Vì  $\lim(-5n^4 + n^3 - 4n) = \lim n^4 \cdot \left( -5 + \frac{1}{n} - \frac{4}{n^3} \right) = -\infty$ .

$$\text{Vì } \begin{cases} \lim n^4 = +\infty \\ \lim \left( -5 + \frac{1}{n} - \frac{4}{n^3} \right) = -5 < 0 \end{cases}$$

**Câu 4:** Tìm được tổng của cấp số nhân lùi vô hạn sau:  $S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$

và  $T = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} - \dots + (-1)^n \frac{1}{3^n} + \dots$ . Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a)  $S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$  là tổng của cấp số nhân lùi vô hạn có công bội  $q = \frac{1}{2}$ .

b)  $T = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} - \dots + (-1)^n \frac{1}{3^n} + \dots$  là tổng của cấp số nhân lùi vô hạn có công bội  $q = \frac{1}{3}$ .

c)  $S > T$

d)  $S = \frac{1}{T}$

#### Lời giải

a) Đúng: Đây là tổng của cấp số nhân lùi vô hạn có số hạng đầu  $u_1 = 1$ , công bội  $q = \frac{1}{2}$ .

$$\Rightarrow S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \left( \frac{1}{2} \right)^n + \dots = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2.$$

b) Sai: Đây là tổng của cấp số nhân lùi vô hạn có số hạng đầu  $u_1 = 1$ , công bội  $q = -\frac{1}{3}$ .

$$\text{Vì vậy } T = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} - \dots + \left( -\frac{1}{3} \right)^n + \dots = \frac{1}{1 + \frac{1}{3}} = \frac{3}{4}.$$

c) Đúng:  $S = 2, T = \frac{3}{4} \Rightarrow S > T$ .

d) Sai:  $\Rightarrow S > T$

**Câu 5:** Cho dãy số  $(u_n)$  với  $u_n = \frac{4n^2 + n + 2}{an^2 + 5}$ . Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Để dãy số đã cho có giới hạn bằng 2, giá trị của  $a = 2$ .

b) Để dãy số đã cho có giới hạn bằng 1, giá trị của  $a = 3$ .

c) Để dãy số đã cho có giới hạn bằng 3, giá trị của  $a$  là một số nguyên

d) Để dãy số đã cho có giới hạn bằng -2, giá trị của  $a = -2$

**Lời giải**

$$\text{a) Đúng: } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2 + n + 2}{an^2 + 5} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 + \frac{1}{n} + \frac{2}{n^2}}{a + \frac{5}{n^2}} = \frac{4}{a} \quad (a \neq 0)$$

$$\text{Khi đó } 2 = \lim u_n \Leftrightarrow 2 = \frac{4}{a} \Leftrightarrow a = 2$$

$$\text{b) Sai: Khi đó } 1 = \lim u_n \Leftrightarrow 1 = \frac{4}{a} \Leftrightarrow a = 4$$

$$\text{c) Sai: Khi đó } 3 = \lim u_n \Leftrightarrow 3 = \frac{4}{a} \Leftrightarrow a = \frac{4}{3}$$

$$\text{d) Đúng: Khi đó } -2 = \lim u_n \Leftrightarrow -2 = \frac{4}{a} \Leftrightarrow a = -2$$

**Câu 6:** Đặt  $I = \lim \left( \sqrt{n^2 + a^2 n} - \sqrt{n^2 + (a+2)n+1} \right)$ . Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

$$\text{a) Ta biến đổi được } I = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-1}{\sqrt{n^2 + n} + \sqrt{n^2 + 1}}$$

b) Nếu  $I = 0$  thì có 3 giá trị  $a$  thỏa mãn

c) Nếu  $I = 0$  thì tổng các giá trị  $a$  tìm được bằng 1

d) Có 2 giá trị  $a$  nguyên để  $I = 1$

**Lời giải**

$$\text{a) Sai: Ta biến đổi được } I = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-1}{\sqrt{n^2 + n} + \sqrt{n^2 + 1}}$$

$$\sqrt{n^2 + a^2 n} - \sqrt{n^2 + (a+2)n+1} \rightarrow 0 \rightarrow \text{nhân lượng liên hợp.}$$

$$\text{Ta có } \lim \left( \sqrt{n^2 + a^2 n} - \sqrt{n^2 + (a+2)n+1} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(a^2 - a - 2)n - 1}{\sqrt{n^2 + n} + \sqrt{n^2 + 1}}$$

$$\text{b) Sai: } I = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^2 - a - 2 - \frac{1}{n}}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + \sqrt{1 + \frac{1}{n^2}}} = \frac{a^2 - a - 2}{2}$$

$$\text{Khi } I = 0 \Leftrightarrow \frac{a^2 - a - 2}{2} = 0 \Leftrightarrow a^2 - a - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ a = 2 \end{cases}$$

c) Sai: Nếu  $I = 0$  thì tổng các giá trị  $a$  tìm được bằng 1. Khi đó  $-1 + 2 = 1 \neq 0$

d) Sai: Có 2 giá trị  $a$  nguyên để  $I = 1$

$$\text{Khi } I = 1 \Leftrightarrow \frac{a^2 - a - 2}{2} = 1 \Leftrightarrow a^2 - a - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1 - \sqrt{17}}{2} \\ a = \frac{1 + \sqrt{17}}{2} \end{cases}$$

**Câu 7:** Cho giới hạn  $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{an^3 + 5n^2 - 7}}{\sqrt{3n^2 - n + 2}}$ . Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

$$\text{a) Khi } a = 1 \text{ thì } L = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

b) Khi  $a=0$  thì  $L=\frac{1}{3}$

c) Khi  $a>0$  thì  $L>0$

d) Khi  $L=b\sqrt{3}+c$  với  $b, c$  là các tham số thì  $P=\frac{a+c}{b^3}=\frac{1}{2}$

**Lời giải**

Ta có  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{an^3+5n^2-7}}{\sqrt{3n^2-n+2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{a+\frac{5}{n}-\frac{7}{n^3}}}{\sqrt{3-\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}}} = \frac{\sqrt[3]{a}}{3} \sqrt{3}$

a) Đúng: Khi  $a=1$  thì  $L=\frac{1}{\sqrt{3}}$ . Với  $a=1$  thì  $L=\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{1}{\sqrt{3}}$

b) Sai: Khi  $a=0$  thì  $L=\frac{1}{3}$ . Với  $a=1$  thì  $L=\sqrt{3}$

c) Đúng: Khi  $a>0$  thì  $L>0$ . Với  $a>0$  thì  $\sqrt[3]{a}>0 \Rightarrow \frac{\sqrt[3]{a}}{3}\sqrt{3}>0 \Rightarrow L>0$

d) Sai: Khi  $L=b\sqrt{3}+c$  với  $b, c$  là các tham số thì  $P=\frac{a+c}{b^3}=\frac{1}{2}$

$$L=\frac{\sqrt[3]{a}}{3}\sqrt{3}=b\sqrt{3}+c \Rightarrow \begin{cases} b=\frac{\sqrt[3]{a}}{3} \\ c=0 \end{cases} \Rightarrow P=\frac{a+c}{b^3}=\frac{a}{\frac{a}{27}}=27$$

**Câu 8:** Cho giới hạn  $L=\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{3+\frac{an^2-1}{3+n^2}-\frac{1}{2^n}}$ . Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a)  $L=2$  khi  $a=1$

b)  $L=3$  thì có 2 giá trị nguyên  $a$  thỏa mãn

c)  $L>3$  khi  $a>6$

d) Có 3 giá trị nguyên của  $a$  thuộc  $(0;20)$  sao cho  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{3+\frac{an^2-1}{3+n^2}-\frac{1}{2^n}}$  là một số nguyên.

**Lời giải**

a) Đúng: Ta có  $\begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{an^2-1}{3+n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a-\frac{1}{n^2}}{\frac{3}{n^2}+1} = a \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0 \end{cases} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{3+\frac{an^2-1}{3+n^2}-\frac{1}{2^n}} = \sqrt{3+a}.$

Khi đó  $L=2 \Leftrightarrow \sqrt{3+a}=2 \Leftrightarrow 3+a=4 \Leftrightarrow a=1$

b) Sai: Khi đó  $L=3 \Leftrightarrow \sqrt{3+a}=3 \Leftrightarrow 3+a=9 \Leftrightarrow a=6$

c) Đúng: Khi đó  $L>3 \Leftrightarrow \sqrt{3+a}>3 \Leftrightarrow 3+a>9 \Leftrightarrow a>6$

d) Đúng: Ta có  $\begin{cases} a \in (0;20), a \in \mathbb{Z} \\ \sqrt{a+3} \in \mathbb{Z} \end{cases} \longrightarrow a \in \{1;6;13\}.$

- Câu 9:** Biết  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 - n + 4}{an^2 + n + 3} = 2$  và  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n + 4^{n+1}}{4^n + 3} = b$ . Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:
- Giá trị của  $a = 2$
  - Giá trị của  $b = 4$
  - $2a - b = 0$
  - Ba số  $a, b, 16$  lập thành một cấp số nhân

**Lời giải**

a) Sai: Ta có  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 - n + 4}{an^2 + n + 3} = 2 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 \left( 2 - \frac{1}{n} + \frac{4}{n^2} \right)}{n^2 \left( a + \frac{1}{n} + \frac{3}{n^2} \right)} = 2$

$$\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 - \frac{1}{n} + \frac{4}{n^2}}{a + \frac{1}{n} + \frac{3}{n^2}} = 2 \Leftrightarrow \frac{2}{a} = 2 \Leftrightarrow a = 1$$

b) Đúng: Ta có  $b = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n + 4^{n+1}}{4^n + 3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n + 4^n \cdot 4}{4^n + 3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{3}{4}\right)^n + 4}{1 + 3 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^n} = 4 \Rightarrow b = 4$

c) Sai: Vậy  $a = 1, b = 4 \Rightarrow 2a - b = 2 \cdot 1 - 4 = -2$ .

d) Đúng: Ta có  $a = 1, b = 4$ .

Mà  $b^2 = 16$  và  $a \cdot 16 = 1 \cdot 16 = 16 \Rightarrow b^2 = a \cdot 16$  nên theo tính chất của cấp số nhân ta có  $1, 4, 16$  lập thành một cấp số nhân với  $u_1 = 1, q = 4$ .

**Câu 10:** Cho dãy số  $(u_n)$  với  $u_n = an^2 + n - 1$  với  $a \in \mathbb{R}$ . Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- Với  $a = 1$ , giới hạn của dãy số đã cho là 1.
- Với  $a = 2$ , giới hạn của dãy số đã cho là  $+\infty$ .
- Với  $a = -\frac{5}{2}$ , giới hạn của dãy số đã cho là  $-\infty$ .
- Với  $a \leq 0$ , giới hạn của dãy số đã cho là  $-\infty$ .

**Lời giải**

a) Sai: Với  $a = 1, u_n = n^2 + n - 1$ .

Ta có:  $\lim_{n \rightarrow \infty} (n^2 + n - 1) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left( 1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} \right) = +\infty$ .

b) Đúng: Với  $a = 2, u_n = 2n^2 + n - 1$ .

Ta có:  $\lim_{n \rightarrow \infty} (2n^2 + n - 1) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left( 2 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} \right) = +\infty$ .

c) Đúng: Với  $a = -\frac{5}{2}, u_n = -\frac{5}{2}n^2 + n - 1$ .

Ta có:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( -\frac{5}{2}n^2 + n - 1 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left( -\frac{5}{2} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} \right) = -\infty$ .

d) Sai: Với  $a < 0$ . Ta có:  $\lim(an^2 + n - 1) = \lim n^2 \left( a + \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} \right) = -\infty$ .

Với  $a = 0$ ,  $u_n = n - 1$ . Ta có:  $\lim(n - 1) = \lim n \left( 1 - \frac{1}{n} \right) = +\infty$ .

**Câu 11:** Ông An bắt đầu đi làm với mức lương khởi điểm là 5000000 đồng một tháng. Cứ sau một chu kỳ 3 năm thì ông An được tăng lương 4%. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- a) Mức lương ông An nhận được sau 3 năm là 52000000 đồng
- b) Tổng số tiền lương ông An nhận được sau 6 năm đầu là 374400000 đồng
- c) Dự đoán công thức tính số tiền lương ông An được nhận  $u_n$ , sau  $n$  chu kỳ năm công tác là:

$$u_n = 50000000 \cdot \left( \frac{26}{25} \right)^n \text{ đồng}$$

d) Giả sử ông An đi làm sau đúng 35 năm thì được về hưu. Tổng số tiền lương ông nhận được trong cả quá trình công tác là 2612277740 đồng

### Lời giải

a) Đúng: Mức lương 3 năm tiếp theo của ông An là:

$$5000000 + 5000000 \cdot \frac{4}{100} = 5000000 \cdot \left( 1 + \frac{1}{25} \right) = 5200000 \text{ (đồng)}$$

b) Sai: 1 năm = 12 tháng.

Tổng lương 3 năm đầu là  $36 \cdot 5000000 = 180000000$  đồng.

Tổng lương từ năm thứ 4 đến năm thứ 6 là:  $36 \cdot 5200000 = 187200000$  đồng.

Tổng số tiền lương ông An nhận được sau 6 năm đầu là:  $180000000 + 187200000 = 367200000$  đồng.

c) Sai: Chu kỳ thứ nhất mức lương của ông An là:  $u_1 = 5000000$  đồng.

Chu kỳ thứ hai mức lương của ông An là:

$$u_2 = 5000000 + 5000000 \cdot \frac{4}{100} = 5000000 \cdot \left( 1 + \frac{1}{25} \right) = 5000000 \cdot \frac{26}{25} \text{ (đồng)}$$

Chu kỳ thứ ba mức lương của ông An là:

$$u_3 = 5000000 \cdot \left( \frac{26}{25} \right) + 5000000 \cdot \left( \frac{26}{25} \right) \cdot \frac{1}{25} = 5000000 \cdot \left( \frac{26}{25} \right) \cdot \left( 1 + \frac{1}{25} \right) = 5000000 \cdot \left( \frac{26}{25} \right)^2 \text{ (đồng)}.$$

Chu kỳ thứ tư mức lương của ông An là:

$$u_4 = 5000000 \cdot \left( \frac{26}{25} \right)^2 + 5000000 \cdot \left( \frac{26}{25} \right)^2 \cdot \frac{1}{25} = 5000000 \cdot \left( \frac{26}{25} \right)^2 \cdot \left( 1 + \frac{1}{25} \right) = 5000000 \cdot \left( \frac{26}{25} \right)^3 \text{ (đồng)}.$$

đồng).

Cứ tiếp tục như vậy ta dự đoán được sau chu kỳ thứ  $n$  số tiền lương ông An nhận được là:

$$u_n = 5000000 \cdot \left( \frac{26}{25} \right)^{n-1} \text{ (đồng)}.$$

d) Đúng: Tổng tiền lương của chu kỳ thứ nhất là:  $36 \cdot 5000000 = 180000000$  đồng.

Tổng tiền lương của chu kỳ thứ hai là:  $36 \cdot 5000000 \cdot \frac{26}{25}$  đồng.

Tổng tiền lương của chu kỳ thứ ba là:  $36 \cdot 5000000 \cdot \left( \frac{26}{25} \right)^2$  đồng.

....

Tổng tiền lương của chu kì thứ mười một là:  $36.5000000 \cdot \left(\frac{26}{25}\right)^{10}$  đồng.

Tổng tiền lương 2 năm tiếp theo của chu kì thứ mười hai là:  $24.5000000 \cdot \left(\frac{26}{25}\right)^{11}$  đồng.

Tổng tiền lương sau tròn 35 năm là:

$$\begin{aligned} S &= 36.5000000 + 36.5000000 \cdot \left(\frac{26}{25}\right) + 36.5000000 \cdot \left(\frac{26}{25}\right)^2 + \dots \\ &+ 36.5000000 \cdot \left(\frac{26}{25}\right)^{10} + 24.5000000 \cdot \left(\frac{26}{25}\right)^{11} \\ &= 36.5000000 \left(1 + \frac{26}{25} + \left(\frac{26}{25}\right)^2 + \dots + \left(\frac{26}{25}\right)^{10}\right) + 24.5000000 \cdot \left(\frac{26}{25}\right)^{11} \\ &= \frac{36.5000000 \cdot \left(1 - \left(\frac{26}{25}\right)^{11}\right)}{1 - \frac{26}{25}} + 24.5000000 \cdot \left(\frac{26}{25}\right)^{11} = 2612277740 \text{ đồng.} \end{aligned}$$

### PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

**Câu 1:**  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \cdot \sqrt{n^2 + 1}}{-2n^2 + n + 1}$  bằng bao nhiêu (kết quả viết dưới dạng số thập phân)?

**Lời giải**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \sqrt{n^2 + 1}}{-2n^2 + n + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 \sqrt{1 + \frac{1}{n^2}}}{n^2 \left(-2 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}}}{-2 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} = -\frac{1}{2} = -0,5.$$

**Câu 2:** Tổng  $S = \frac{1}{3} - \frac{1}{9} + \frac{1}{27} - \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{3^n} + \dots$  bằng bao nhiêu (kết quả viết dưới dạng số thập phân)?

**Lời giải**

Ta thấy  $S$  là tổng của cấp số nhân lùi vô hạn với số hạng đầu  $u_1 = \frac{1}{3}$ , công bội  $q = -\frac{1}{3}$ .

$$\text{Vì vậy } S = \frac{u_1}{1 - q} = \frac{\frac{1}{3}}{1 - (-\frac{1}{3})} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{4} = 0,25.$$

**Câu 3:** Cho dãy số  $(u_n)$  với  $u_n = \frac{3n-1}{n \cdot 2^n} + 2024$ . Khi đó  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$  bằng bao nhiêu?

**Lời giải**

Ta có  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{3n-1}{n \cdot 2^n} + 2024 \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{3-\frac{1}{n}}{2^n} + 2024 \right).$

Vì  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( 3 - \frac{1}{n} \right) = 3$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2^n = +\infty$  nên  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3-\frac{1}{n}}{2^n} = 0.$

Vậy  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0 + 2024 = 2024.$

**Câu 4:** Cho  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[ \sqrt{4n^2 - 3n + 1} - (an + b) \right] = 0, (a, b \in \mathbb{R}).$  Tính  $S = a + 8b.$

**Lời giải**

Ta có:  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[ \sqrt{4n^2 - 3n + 1} - (an + b) \right] = 0 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{4n^2 - 3n + 1 - a^2 n^2}{\sqrt{4n^2 - 3n + 1} + an} - b \right) = 0$

$$\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[ \frac{(4 - a^2)n^2 - 3n + 1}{\sqrt{4n^2 - 3n + 1} + an} - b \right] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 4 - a^2 = 0 \\ a > 0 \\ \frac{-3}{2+a} - b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -\frac{3}{4} \end{cases}.$$

Vậy  $S = a + 8b = -4.$

**Câu 5:** Biết số thập phân vô hạn tuần hoàn  $0,212121... = \frac{a}{b}$  ( với  $a, b$  là các số dương có ước chung lớn nhất là 1). Tính giá trị  $a + b.$

**Lời giải**

Ta có  $0,212121... = 0,21 + 0,0021 + 0,000021 + ... = \frac{21}{100} + \frac{21}{100^2} + \frac{21}{100^3} + ... = \frac{\frac{21}{100}}{1 - \frac{1}{100}} = \frac{7}{33}.$

Do đó  $a = 7, b = 33.$  Vậy  $a + b = 40.$

**Câu 6:** Giới hạn  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n^2 - 3\sqrt{n} + 1}{3n\sqrt{n} + 2n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a\sqrt{n} - \frac{3}{n} + \frac{1}{n\sqrt{n}}}{b + \frac{2}{\sqrt{n}}}$  với  $a, b$  là các số tự nhiên. Tính  $P = a + b^2$

**Lời giải**

Ta có:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n^2 - 3\sqrt{n} + 1}{3n\sqrt{n} + 2n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n\sqrt{n} \left( 2\sqrt{n} - \frac{3}{n} + \frac{1}{n\sqrt{n}} \right)}{n\sqrt{n} \left( 3 + \frac{2}{\sqrt{n}} \right)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2\sqrt{n} - \frac{3}{n} + \frac{1}{n\sqrt{n}}}{3 + \frac{2}{\sqrt{n}}} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 3 \end{cases} \rightarrow P = a + b^2 = 11$$

**Câu 7:** Giá trị của giới hạn  $\lim(\sqrt{n^2 + 2n - 2} - n) = \lim \frac{a \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right)}{\sqrt{1 + b \cdot \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}\right)} + 1}$  với  $a; b$  là các số tự nhiên.

Tính  $S = (a + b)^2$

**Lời giải**

$$\begin{aligned} \lim(\sqrt{n^2 + 2n - 2} - n) &= \lim \frac{n^2 + 2n - 2 - n^2}{\sqrt{n^2 + 2n - 2} + n} = \lim \frac{2n - 2}{n\sqrt{1 + \frac{2}{n} - \frac{2}{n^2}} + n} \\ &= \lim \frac{n\left(2 - \frac{2}{n}\right)}{n\left(\sqrt{1 + \frac{2}{n} - \frac{2}{n^2}} + 1\right)} = \lim \frac{2 - \frac{2}{n}}{\sqrt{1 + \frac{2}{n} - \frac{2}{n^2}} + 1} = \lim \frac{2 \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right)}{\sqrt{1 + 2 \cdot \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}\right)} + 1} \end{aligned}$$

Khi đó  $a = b = 2 \Rightarrow S = (a + b)^2 = 16$

**Câu 8:** Giới hạn  $\lim \sqrt[3]{\frac{2^{3n} - 3^{n+1}}{8^{n+1} + 6^{n-1}}} = \lim \sqrt[3]{\frac{1 - 3 \cdot a^n}{8 + \frac{1}{6} \cdot b^n}}$  với  $a; b$  là các số hữu tỉ. Tính giá trị  $8(a + b)$

**Lời giải**

$$\lim \sqrt[3]{\frac{2^{3n} - 3^{n+1}}{8^{n+1} + 6^{n-1}}} = \lim \sqrt[3]{\frac{8^n - 3 \cdot 3^n}{8 \cdot 8^n + \frac{1}{6} 6^n}} = \lim \sqrt[3]{\frac{8^n \left(1 - 3 \cdot \left(\frac{3}{8}\right)^n\right)}{8^n \left(8 + \frac{1}{6} \left(\frac{6}{8}\right)^n\right)}} = \lim \sqrt[3]{\frac{1 - 3 \cdot \left(\frac{3}{8}\right)^n}{8 + \frac{1}{6} \left(\frac{3}{4}\right)^n}}$$

Khi đó  $\begin{cases} a = \frac{3}{8} \\ b = \frac{3}{4} \end{cases} \rightarrow 8(a + b) = 9$

**Câu 9:** Tìm giới hạn  $\lim \left[ \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} \right]$

**Lời giải**

$$\begin{aligned} &\lim \left[ \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} \right] \\ &= \lim \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right) = \lim \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1}{2n+1} \right) = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

**Câu 10:** Tìm tổng  $S = \frac{1}{3} - \frac{1}{9} + \frac{1}{27} - \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{3^n} + \dots$

**Lời giải**

Ta thấy  $S$  là tổng của cấp số nhân lùi vô hạn với số hạng đầu  $u_1 = \frac{1}{3}$ , công bội  $q = -\frac{1}{3}$ .

$$\text{Vì vậy } S = \frac{u_1}{1-q} = \frac{\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{3}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{4}.$$

**Câu 11:** Giá trị của tổng  $T = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}} + \dots + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n + \dots = a + \sqrt{b}$  với  $a; b$  là các số tự nhiên. Tính giá trị  $S = (a+b)^2$

**Lời giải**

Ta thấy  $T$  là tổng của cấp số nhân lùi vô hạn có số hạng đầu  $u_1 = 1$ , công bội

$$q = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

$$\text{Vì vậy } T = \frac{u_1}{1-q} = \frac{1}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}} = 2 + \sqrt{2} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 2 \end{cases} \Rightarrow S = (a+b)^2 = 16$$

**Câu 12:** Số thập phân vô hạn tuần hoàn  $0,271414\dots$  viết dạng phân số có dạng  $\frac{m}{n}$  với  $m; n$  là các số tự nhiên và  $\frac{m}{n}$  là phân số tối giản. Tính  $n - 3m$

**Lời giải**

Ta có:  $0,271414\dots = 0,27 + 0,0014 + 0,000014 + \dots$

Xét tổng  $0,0014 + 0,000014 + 0,00000014 + \dots$

Đây là tổng của một cấp số nhân lùi vô hạn có số hạng đầu là  $u_1 = 0,0014$  và công bội  $q = \frac{1}{100}$ .

$$\text{Vì vậy } 0,271414\dots = 0,27 + \frac{u_1}{1-q} = \frac{27}{100} + \frac{0,0014}{1-\frac{1}{100}} = \frac{2687}{9900} \Rightarrow \begin{cases} m = 2687 \\ n = 9900 \end{cases} \Rightarrow n - 3m = 1839.$$

**Câu 13:** Số thập phân vô hạn tuần hoàn  $0,511111\dots$  viết dạng phân số có dạng  $\frac{a}{b}$  với  $a; b$  là các số tự nhiên và  $\frac{a}{b}$  là phân số tối giản. Tính  $|b - 2a|$

**Lời giải**

Ta có:  $0,511111\dots = 0,5 + 0,01 + 0,001 + 0,0001 + \dots$

Xét tổng  $0,01 + 0,001 + 0,0001 + \dots$

Đây là tổng của cấp số nhân lùi vô hạn với số hạng đầu là  $u_1 = 0,01$  và công bội  $q = \frac{1}{10}$ .

Vì vậy  $0,511111\dots = 0,5 + 0,01 + 0,001 + 0,0001 + \dots$

$$= 0,5 + \frac{u_1}{1-q} = 0,5 + \frac{0,01}{1-\frac{1}{10}} = \frac{23}{45} \Rightarrow \begin{cases} a = 23 \\ b = 45 \end{cases} \Rightarrow |b - 2a| = 1$$

**Câu 14:** Cho dãy số  $(u_n)$  với  $\begin{cases} u_1 = -2 \\ u_n = 3u_{n-1} - 1, \forall n \geq 2 \end{cases}$ , tính  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{3^n}$ . Kết quả làm tròn đến hàng phần mười.

**Lời giải**

Xét số  $a$  thỏa mãn  $u_n - a = 3(u_{n-1} - a), \forall n \geq 2 \Leftrightarrow u_n = 3u_{n-1} - 2a, \forall n \geq 2$ .

Suy ra  $-2a = -1 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$ .

$$\text{Vậy } \begin{cases} u_1 = -2 \\ u_n - \frac{1}{2} = 3\left(u_{n-1} - \frac{1}{2}\right), \forall n \geq 2 \end{cases}.$$

Đặt  $v_n = u_n - \frac{1}{2} \Rightarrow v_{n-1} = u_{n-1} - \frac{1}{2}, \forall n \geq 2$  và  $v_1 = u_1 - \frac{1}{2} = -2 - \frac{1}{2} = -\frac{5}{2}$ .

$$\text{Khi đó dãy } (v_n) \text{ thỏa mãn } \begin{cases} v_1 = -\frac{5}{2} \\ v_n = 3v_{n-1}, \forall n \geq 2 \end{cases}.$$

Ta thấy  $(v_n)$  là cấp số nhân với  $v_1 = -\frac{5}{2}$ , công bội  $q = 3$ , suy ra  $v_n = -\frac{5}{2} \cdot 3^{n-1}, \forall n \geq 1$

Do đó  $u_n = v_n + \frac{1}{2} = -\frac{5}{2} \cdot 3^{n-1} + \frac{1}{2}, \forall n \geq 1$ .

$$\text{Vậy } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{3^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-\frac{5}{2} \cdot 3^{n-1} + \frac{1}{2}}{3^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( -\frac{5}{6} + \frac{1}{2 \cdot 3^n} \right) = -\frac{5}{6} \approx -0,8.$$

**Câu 15:** Biết rằng giới hạn  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 - 4n + 5} + 3 - n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{5 - a \cdot n}{\sqrt{n^2 - 4n + 5} + n} + b \right)$  với  $a; b$  là các số tự nhiên. Tính giá trị  $S = a^b$

**Lời giải**

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 - 4n + 5} + 3 - n) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{(\sqrt{n^2 - 4n + 5} - n) \cdot (\sqrt{n^2 - 4n + 5} + n)}{\sqrt{n^2 - 4n + 5} + n} + 3 \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n^2 - 4n + 5 - n^2}{\sqrt{n^2 - 4n + 5} + n} + 3 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{-4n + 5}{\sqrt{n^2 - 4n + 5} + n} + 3 \right) \end{aligned}$$

$$\text{Khi đó } \begin{cases} a = 4 \\ b = 3 \end{cases} \Rightarrow S = a^b = 64$$

**Câu 16:** Biết rằng giới hạn  $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + 3n - \sqrt{9n^2 - n + 7}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( a + \frac{n - 7}{b \cdot n + c \cdot \sqrt{9n^2 - n + 7}} \right)$  với  $a; b; c$  là các số tự nhiên. Tính giá trị  $|a - b| + c$

**Lời giải**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + 3n - \sqrt{9n^2 - n + 7}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{9n^2 - 9n^2 + n - 7}{3n + \sqrt{9n^2 - n + 7}} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{n - 7}{3n + \sqrt{9n^2 - n + 7}} \right)$$

$$\text{Khi đó } \begin{cases} a = 1 \\ b = 3 \Rightarrow |a - b| + c = 3 \\ c = 1 \end{cases}$$

**Câu 17:** Biết giới hạn  $\lim \left( \sqrt[3]{n^3 + 3} - \sqrt{n^2 + 2} \right) = \lim \frac{a}{\sqrt[3]{(n^3 + 3)^2} + n^2 + n \cdot \sqrt[3]{n^3 + 3}} - \lim \frac{b}{n + \sqrt{n^2 + 2}}$  với  $a; b$  là các số nguyên dương. Tính  $T = 2a + 3b$ .

**Lời giải**

$$\begin{aligned} \lim \left( \sqrt[3]{n^3 + 3} - \sqrt{n^2 + 2} \right) &= \lim \left( \sqrt[3]{n^3 + 3} - n \right) + \lim \left( n - \sqrt{n^2 + 2} \right) \\ &= \lim \frac{n^3 + 3 - n^3}{(n^3 + 3)^{\frac{2}{3}} + n^2 + n \cdot \sqrt[3]{n^3 + 3}} + \lim \frac{n^2 - n^2 - 2}{n + \sqrt{n^2 + 2}} \\ &= \lim \frac{3}{(n^3 + 3)^{\frac{2}{3}} + n^2 + n \cdot \sqrt[3]{n^3 + 3}} - \lim \frac{2}{n + \sqrt{n^2 + 2}} \\ &= \lim \frac{3}{\sqrt[3]{(n^3 + 3)^2} + n^2 + n \cdot \sqrt[3]{n^3 + 3}} - \lim \frac{2}{n + \sqrt{n^2 + 2}} \end{aligned}$$

Do đó,  $\begin{cases} a = 3 \\ b = 2 \end{cases} \rightarrow T = 2a + 3b = 12$ .

**Câu 18:** Giới hạn dãy số  $u_n = \frac{\sqrt{n^2 + 2n} - \sqrt{n^2 + n}}{n}$  có dạng  $\lim \frac{\frac{a}{n}}{\sqrt{1 + \frac{b}{n}} + \sqrt{1 + \frac{c}{n}}}$  với  $a; b; c$  là các số tự nhiên. Tính giá trị  $a^2 + b^2 + c^2$

**Lời giải**

$$\begin{aligned} \lim u_n &= \lim \frac{\sqrt{n^2 + 2n} - \sqrt{n^2 + n}}{n} = \lim \frac{(n^2 + 2n) - (n^2 + n)}{n(\sqrt{n^2 + 2n} + \sqrt{n^2 + n})} = \lim \frac{n}{n(\sqrt{n^2 + 2n} + \sqrt{n^2 + n})} \\ &= \lim \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2n} + \sqrt{n^2 + n}} = \lim \frac{\frac{1}{n}}{\sqrt{1 + \frac{2}{n}} + \sqrt{1 + \frac{1}{n}}} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \\ c = 1 \end{cases} \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 = 6. \end{aligned}$$

**Câu 19:** Biết giới hạn  $\lim \frac{\sqrt[3]{2n^2 - n^3} + n}{\sqrt{n^2 + n} - n} = \lim \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1}{\sqrt[3]{\left(\frac{a}{n} - b\right)^2} + 1 - \sqrt[3]{\frac{2}{n}} - 1}$  với  $a; b$  là các số nguyên dương.

Tính  $S = a + b$ .

**Lời giải**

$$\lim \frac{\sqrt[3]{2n^2 - n^3} + n}{\sqrt{n^2 + n} - n} = \lim \frac{2n^2 - n^3 + n^3}{n^2 + n - n^2} \cdot \frac{\sqrt{n^2 + n} + n}{\sqrt[3]{(2n^2 - n^3)^2} + n^2 - n\sqrt[3]{2n^2 - n^3}}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim \frac{\sqrt{\left(n\sqrt{1+\frac{1}{n}}+n\right)}}{\sqrt[3]{n^6 \cdot \left(\frac{2}{n}-1\right)^2 + n^2 - n} \cdot \sqrt[3]{n^3 \left(\frac{2}{n}-1\right)}} = \lim \frac{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}{\left(\frac{2}{n}-1\right)^{\frac{2}{3}}+1-\sqrt[3]{\frac{2}{n}-1}} \\
&= \lim \frac{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}{\sqrt[3]{\left(\frac{2}{n}-1\right)^2}+1-\sqrt[3]{\frac{2}{n}-1}} \rightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=1 \end{cases} \rightarrow S=3
\end{aligned}$$

**Câu 20:** Tìm tổng của cấp số nhân lùi vô hạn sau:  $S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \dots$ . Kết quả làm tròn đến hàng phần mười.

**Lời giải**

**Nhận xét:** Ta cần áp dụng công thức tổng cấp số nhân lùi vô hạn:

$S = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots = \frac{u_1}{1-q}$  trong đó  $u_1, q$  theo thứ tự là số hạng đầu và công bội của cấp số nhân đó.

Đây là tổng của cấp số nhân lùi vô hạn có số hạng đầu  $u_1 = 1$ , công bội  $q = -\frac{1}{2}$ .

$$S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \dots + \left(-\frac{1}{2}\right)^n + \dots = \frac{1}{1+\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}.$$

**Câu 21:** Tính giới hạn  $L = \lim \frac{1+3+5+\dots+2n-1}{5n^2-n+1}$ .

**Lời giải**

Ta có tổng  $1+3+5+\dots+2n-1$  là tổng cấp số cộng của  $n$  số hạng với  $u_1 = 1, d = 2$ .

$$\text{Suy ra } 1+3+5+\dots+2n-1 = \frac{n(1+2n-1)}{2} = n^2.$$

$$\text{Do đó } L = \lim \frac{1+3+5+\dots+2n-1}{5n^2-n+1} = \lim \frac{n^2}{5n^2-n+1} = \lim \frac{1}{5-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{5}.$$

Vậy  $L = 0,2$ .

**Câu 22:** Tính giới hạn  $L = \lim \left[ \frac{(3^n+2)(2^n+1)}{3^n+2} - 2^n + 2 \right]$ .

**Lời giải**

$$\text{Ta có } L = \lim \left[ \frac{(3^n+2)(2^n+1)}{3^n+2} - 2^n + 2 \right] = \lim \left[ \frac{(3^n+2)(2^n+1) - 2^n(3^n+2)}{3^n+2} \right] + 2$$

$$= \lim \frac{6^n + 3^n + 2 \cdot 2^n + 2 - 6^n - 2 \cdot 2^n}{3^n + 2} + 2 = \lim \frac{3^n + 2}{3^n + 2} + 2 = \lim 1 + 2 = 3.$$

**Câu 23:** Tính giới hạn  $L = \lim \left( \sqrt{n^{24} + 6n^{12} + 1} - \sqrt[3]{n^{36} + 3n^{24} + 2} \right)$ .

**Lời giải**

$$\text{Ta có } L = \lim \left( \sqrt{n^{24} + 6n^{12} + 1} - \sqrt[3]{n^{36} + 3n^{24} + 2} \right)$$

$$L = \lim \left( \sqrt{n^{24} + 6n^{12} + 1} - n^{12} \right) + \lim \left( n^{12} - \sqrt[3]{n^{36} + 3n^{24} + 2} \right) = L_1 + L_2.$$

Trong đó

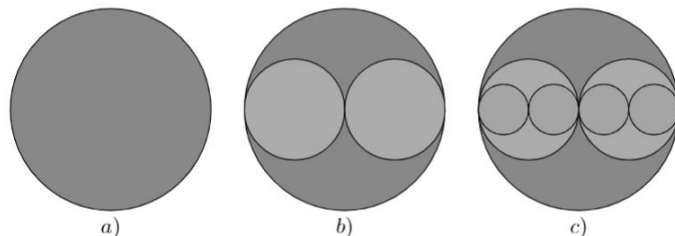
$$+ L_1 = \lim \left( \sqrt{n^{24} + 6n^{12} + 1} - n^{12} \right) = \lim \frac{6n^{12} + 1}{\sqrt{n^{24} + 6n^{12} + 1} + n^{12}} = \lim \frac{6 + \frac{1}{n^{12}}}{\sqrt{1 + \frac{6}{n^{12}} + \frac{1}{n^{24}}} + 1} = 3.$$

$$+ L_2 = \lim \left( n^{12} - \sqrt[3]{n^{36} + 3n^{24} + 2} \right) = \lim \frac{-3n^{24} - 2}{n^{24} + n^{12} \sqrt[3]{n^{36} + 3n^{24} + 2} + \left( \sqrt[3]{n^{36} + 3n^{24} + 2} \right)^2}$$

$$= \lim \frac{-3 - \frac{2}{n^{24}}}{1 + \sqrt[3]{1 + \frac{3}{n^{12}} + \frac{2}{n^{36}}} + \left( \sqrt[3]{1 + \frac{3}{n^{12}} + \frac{2}{n^{36}}} \right)^2} = -1.$$

$$\text{Vậy } L = 3 + (-1) = 2.$$

**Câu 24:** Từ tờ giấy, cắt một hình tròn bán kính  $R = 2(\text{cm})$  như Hình 3a. Tiếp theo, cắt hai hình tròn bán kính  $\frac{R}{2}$  chồng lên hình tròn đầu tiên như Hình 3b. Tiếp theo, cắt bốn hình tròn bán kính  $\frac{R}{4}$  rồi chồng lên các hình trước như hình c). Cứ thế tiếp tục mãi. Tính tổng diện tích của các hình tròn (làm tròn kết quả đến hàng phần chục).



**Lời giải**

Gọi  $u_1$  là diện tích của hình tròn thứ nhất, ta có  $u_1 = \pi R^2$ .

Gọi  $u_2$  là tổng diện tích của  $2^1$  hình tròn cắt lần thứ hai, ta có  $u_2 = 2\pi \cdot \left(\frac{R}{2}\right)^2 = \pi R^2 \cdot \frac{1}{2}$ .

Gọi  $u_3$  là tổng diện tích của  $2^2$  hình tròn cắt lần thứ ba, ta có  $u_3 = 4\pi \cdot \left(\frac{R}{4}\right)^2 = \pi R^2 \cdot \frac{1}{2^2}$ .

...

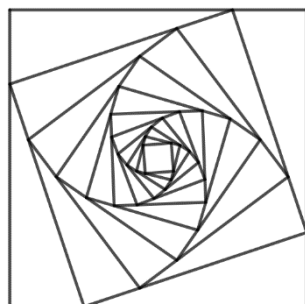
Gọi  $u_n$  là tổng diện tích của  $2^{n-1}$  hình tròn cắt lần thứ  $n$ , ta có  $u_n = 2^{n-1} \pi \cdot \left(\frac{R}{2^{n-1}}\right)^2 = \pi R^2 \cdot \frac{1}{2^{n-1}}$ .

Dãy  $u_1, u_2, u_3, \dots, u_n, \dots$  là cấp số nhân lùi vô hạn có số hạng đầu  $u_1 = \pi R^2$  và công bội  $q = \frac{1}{2}$ .

Vậy tổng diện tích của các hình tròn là:

$$S = \pi R^2 + \pi R^2 \cdot \frac{1}{2} + \pi R^2 \cdot \frac{1}{2^2} + \dots = \frac{\pi R^2}{1 - \frac{1}{2}} = 2\pi R^2 = 2\pi \cdot 2^2 \approx 25,1 (cm^2).$$

**Câu 25:** Cho hình vuông  $C_1$  có cạnh bằng  $a$ . Người ta chia mỗi cạnh của hình vuông thành bốn phần bằng nhau và nối các điểm chia một cách thích hợp để có hình vuông  $C_2$  (hình vẽ). Từ hình vuông  $C_2$  lại tiếp tục làm như trên ta nhận được dãy các hình vuông  $C_1, C_2, C_3, \dots, C_n$ . Gọi  $S_i$  là diện tích của hình vuông  $C_i$  ( $i \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$ ). Khi đó  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2025}{a^2} (S_1 + S_2 + \dots + S_n)$  bằng bao nhiêu?



**Lời giải**

Cạnh của hình vuông  $C_1$  là  $a$  Do đó  $S_1 = a^2$ .

Cạnh của hình vuông  $C_2$  là  $\sqrt{\left(\frac{3a}{4}\right)^2 + \left(\frac{a}{4}\right)^2} = \frac{a\sqrt{10}}{4}$ . Do đó  $S_2 = \frac{10}{16}a^2 = \frac{10}{16}S_1$ .

Tương tự ta có  $S_3 = \frac{10}{16}S_2; \dots; S_n = \frac{10}{16}S_{n-1}$ .

Khi đó  $S_1 + S_2 + \dots + S_n = S_1 \left[ 1 + \left(\frac{10}{16}\right) + \left(\frac{10}{16}\right)^2 + \left(\frac{10}{16}\right)^3 + \dots + \left(\frac{10}{16}\right)^{n-1} \right]$ .

Suy ra  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2025}{a^2} (S_1 + S_2 + \dots + S_n) = \frac{2025}{a^2} \cdot \frac{a^2}{1 - \frac{10}{16}} = \frac{2025}{a^2} \cdot \frac{8}{3} \cdot a^2 = 5400$ .

**Câu 26:** Từ độ cao  $55,8m$  của tháp nghiêng Pisa nước Ý, người ta thả một quả bóng cao su chạm xuống đất (hình vẽ). Giả sử mỗi lần chạm đất quả bóng nảy lên với độ cao bằng  $\frac{1}{10}$  độ cao mà quả bóng đạt được trước đó. Tổng quãng đường mà quả bóng di chuyển từ khi thả cho đến khi dừng hẳn bằng bao nhiêu mét (kết quả làm tròn đến hàng phần chục)?



### Lời giải

Quãng đường đầu tiên bóng rơi xuống chạm đất lần 1 là  $55,8m$ .

Quãng đường nảy lên lần thứ nhất và rơi xuống chạm đất lần 2 là:  $2 \cdot \frac{55,8}{10} m$ .

Quãng đường nảy lên lần thứ hai và rơi xuống chạm đất lần 3 là:  $2 \cdot \frac{55,8}{10^2} m$ .

Quãng đường nảy lên lần thứ ba và rơi xuống chạm đất lần thứ 4 là:  $2 \cdot \frac{55,8}{10^3} m$ .

Vậy nếu gọi  $S_n$  là tổng độ dài quãng đường di chuyển của quả bóng tính từ lúc thả ban đầu cho đến khi quả bóng nảy lên lần thứ  $n$  rồi chạm đất thì khi đó ta có:

$$\begin{aligned} S_n &= 55,8 + 2 \cdot 55,8 \left( \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \dots + \frac{1}{10^n} \right) = 55,8 \left( 1 + 2 \left( \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \dots + \frac{1}{10^n} \right) \right) \\ &= 55,8 \left( 1 + \frac{2}{9} \left( 1 - \left( \frac{1}{10} \right)^n \right) \right). \end{aligned}$$

Do đó tổng quãng đường mà quả bóng di chuyển từ khi thả cho đến khi dừng hẳn là

$$S = \lim S_n = \lim \left( 55,8 \left( 1 + \frac{2}{9} \left( 1 - \left( \frac{1}{10} \right)^n \right) \right) \right) = 55,8 \left( 1 + \frac{2}{9} \right) \approx 68,2.$$

-----HẾT-----